CCH ORIENTE

GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
FERMAN ARELLANO CABEZAS
ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
LAURO ARTURO HERRERA MORALES

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza

CICLO 2023 - 2024

DEFINICIÓN

Es el documento impreso o en línea elaborado para apoyar la preparación de un examen extraordinario, con base en el Programa de Estudio de la asignatura. Será elaborado colegiadamente y deberá incluir: a) introducción; b) instrucciones; c) presentación de cada unidad, indicando los conceptos clave; d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas; e) autoevaluación del aprendizaje con base en problemas y preguntas representativas de los aprendizajes y f) fuentes consultadas que deberán presentarse en formato APA. Debe estar aprobada por una instancia de Dirección correspondiente y ser utilizada, por lo menos, en un periodo de exámenes.

INTRODUCCIÓN

Esta obra documento tiene como propósito guiar al estudiante (en particular a los estudiantes del plantel Oriente) en la preparación del examen extraordinario de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II, que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades. La hemos elaborado un grupo de profesores del Área de Matemáticas del plantel Oriente del CCH que compartimos el interés de apoyar a los alumnos que por una u otra razón adeuda la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II. Su contenido se basa (y cubre) los aprendizajes y temática contenidos en el programa indicativo y vigente de la asignatura ya antes señalada, también presenta las características que definen a una Guía para Examen Extraordinario en el Glosario de Términos del Protocolo de equivalencias del Colegio.

Cada unidad se subdivide en tres secciones, la primera sección de cada unidad tiene como inicio los conceptos claves de toda la unidad, el propósito, los aprendizajes y temática que trata, así como el desarrollo disciplinario y didáctico. Utilizamos explicaciones teóricas formales, figuras y una gran cantidad y diversidad de ejemplos prácticos totalmente resueltos cuya lectura y análisis permitirá al alumno apropiarse de los conceptos y un uso correcto de los algoritmos y conocimientos correspondientes. En su desarrollo disciplinario también proponemos un grupo de ejercicios con la finalidad de que el alumno practique lo aprendido. En la tercera sección el alumno encontrará las soluciones de todos los ejercicios propuestos en las secciones 1 y 2; incluye un examen de auto evaluación (con las soluciones) con el fin de que mida los conocimientos y las habilidades que adquirió. En la parte final de la obra presentamos las referencias bibliográficas en que el estudiante puede consultar los temas en los que desee profundizar; asimismo, esta obra puede ser de gran utilidad y apoyo a los profesores que imparten cursos PAE en el, desarrollo de su labor, al enriquecer o incrementar la complejidad de los ejercicios y contenidos abarcados en su quehacer docente.

LOS AUTORES



La Guía para el Examen Extraordinario de Cálculo Diferencial e Integral II ha sido escrita para que la utilices como apoyo y/o complemento en tu preparación para presentar el examen extraordinario de la asignatura del mismo nombre; para que repases, y/o conozcas los conceptos básicos y practiques a adecuadamente y a fondo los algoritmos de mayor representatividad en el estudio del cálculo a nivel bachillerato. Debes leer la sección (o la parte que te interese) y reproducir los ejemplos resueltos antes de intentar resolver los problemas y/o actividades que te proponemos. Ten en cuenta que leer sobre matemáticas dista bastante de leer otro tipo de documentos, tales como una novela, un periódico o hasta libros de otras ramas del conocimiento. Regularmente las secciones de textos de matemáticas (de interés para el lector), se leen y se releen varias veces para poder comprenderlas. Debes poner especial atención a los ejemplos resueltos y reconstruir su resolución; utiliza lápiz y papel a medida que los leas y, a continuación, intenta resolver los ejercicios propuesto en la sección. Siguiendo estos consejos seguramente podrás hacer tu tarea optimizando el tiempo y avanzarás en la comprensión de conceptos y habilidades en el uso de los algoritmos.

En un primer acercamiento a una unidad memoriza las definiciones y trata de comprender los conceptos, sin embargo, no debes cometer el error de tratar como reglas los ejercicios resueltos que contenidos. Las matemáticas no son simples memorizaciones, sino que son el *arte de modelar y posteriormente resolver problemas,* ¡no se trata de memorizar problemas resueltos! Para comprender significativamente una unidad o un tema, debes modelar y resolver problemas, muchos problemas; haz todos los que puedas, intenta escribir sus soluciones en una forma lógica y detalladamente, paso a paso. Por lo general, para resolver un problema en matemáticas se realizan varios intentos, ¡no te rindas ante ellos, si no puedes resolverlo en los primeros intentos! Los primeros intentos en la resolución de problemas se relacionan con su comprensión y para ello se

tienen que leer varias veces y relacionarlo con lo que ya aprendiste en tus cursos previos de matemáticas y de los ejemplos resueltos de la guía. Lucha con cada problema hasta que lo resuelvas; una vez que lo hayas hecho esto varias cuantas veces, comprenderás el papel de las matemáticas en los procesos mentales del aprendizaje.

Las respuestas de todos los ejercicios y a todas las preguntas de los exámenes propuestos se encuentran en la tercera sección de cada unidad. Si tu respuesta a cierto ejercicio difiera de la que te proponemos, no concluyas de inmediato que estás en error, tu respuesta y la propuesta pueden ser equivalentes y estar enlazadas por medio de ciertas consideraciones y ambas ser correctas.

LOS AUTORES

INDICE

1. DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno

Ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.



Función. Relación entre dos variables (numéricas) de manera que a la primera de ella le asocia un único valor de la segunda.

Función trigonométrica. Relación que asocia a la medida de un ángulo (equivalentemente la longitud de un arco de circunferencia) la razón entre las longitudes (orientadas) de dos lados de un triángulo.

Función derivada. Función f' obtenida al aplicarle la "operación" $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ a la función f.

Significado de función derivada de f. Función que describe la rapidez de cambio de f en uno de sus puntos. Función que describe la rapidez de cambio de la pendiente de la función f.

Composición de funciones. Operación entre dos (o más) función en la que la variable independiente de una de las funciones es sustituida por la otra función.

Regla de la cadena. "Regla" que asocia la función derivada a una composición de funciones.

Función invertible. Función f para la cual existe la función f^{-1} tal que

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x = f^{-1}\left(f(x)\right)$$

Par de funciones inversas relativas. Funciones que satisfacen la condición

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x = f^{-1}\left(f(x)\right), \text{ para toda } x \in dom(f)$$

Función logaritmo natural. Suele definirse como el área (orientada) de la región del plano que limitan dos líneas rectas verticales, el eje de las abscisas y la curva asociada por la rama positiva de la hipérbola descrita por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Generalización de la función logaritmo natural (cambio de base).

Función definida en términos de la función logaritmo natural como $f(x) = log_a x = \frac{ln\, x}{ln\, a}$

Función exponencial natural (cambio de base). Función definida en términos de la función exponencial natural como $f(x) = a^x = e^{x\, ln\, a}$

1.1 DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

APRENDIZAJES

El alumno

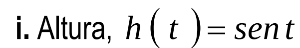
1. Relaciona en diversos contextos la variación de las funciones seno y coseno a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos.
2. Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica.
3. Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante.
4. Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas.
5. Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas en diversos contextos.

Las funciones trigonométricas son útiles para modelar situaciones o problemas en los que la variable dependiente cambia periódicamente al cambiar la variable independiente.

EJEMPLO 1. DOS APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.

a. Sea el círculo unitario (centro en el origen del plano cartesiano y radio con longitud uno), entonces, el triángulo con vértices en los puntos: $O(0,0)$, $A(x_0,y_0)$ y $B(x_0,0)$ generan el triángulo rectángulo OAB (en el primer cuadrante del plano cartesiano $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$).

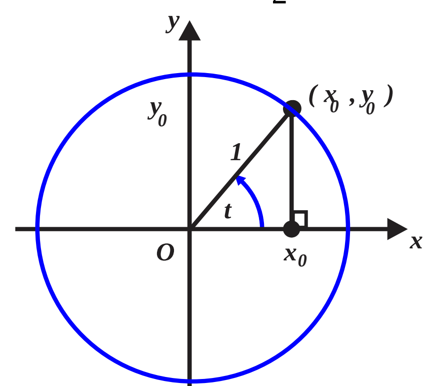


i. Altura, $h(t)=sen\,t$

ii. Base, $b(t)=cos\,t$

iii. Perímetro, $p(t)=1+sen\,t+cos\,t$

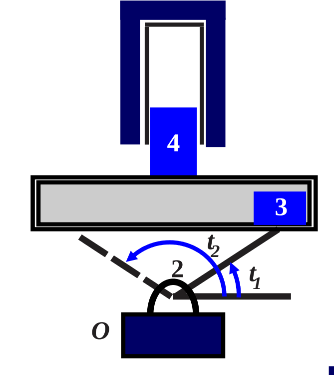
iv. Área, $A(t)=\frac{1}{2}(sen\,t)(cos\,t)$



b. La *figura* muestra un yugo. Cuando el eslabón 2 gira con velocidad angular constante, entonces, efectúa un movimiento periódico, completa un giro alrededor de la articulación O en un mismo período de tiempo. Simultáneamente, los eslabones 3 y 4 realizan movimientos periódicos que se modelan por las funciones:

i. Eslabón 3, $b(t)=cos\,t$, si $t_1 \le t \le t_2$

ii. Eslabón 4, $h(t)=sen\,t$, si $t_1 \le t \le t_2$



Con base en las funciones trigonométricas $f(t)=sen\,t$ y $f(t)=sen\,t$ (ambas con dominio en el conjunto de los números reales) pueden construirse las funciones:

i. Tangente, $f(t)=tg\,t=\frac{sen\,t}{cos\,t}$ y dominio $dom_{tg\,t}=IR-\left\{ t \mid t=\frac{(2n+1)}{2}\pi, \text{con } n\in Z \right\}$

ii. Cotangente, $f(t) = ctg\, t = \dfrac{\cos t}{sen\, t}$ y dominio $dom_{ctg\, t} = IR - \{ t \mid t = n\pi,\ \text{con } n \in Z \}$

iii. Secante, $f(t) = sec\, t = \dfrac{1}{sen\, t}$ y dominio

$$dom_{\sec t} = IR - \{ t \mid t = n\pi,\ \text{con } n \in Z \}$$

iv. Cosecante, $f(t) = csc\, t = \dfrac{1}{sen\, t}$ y dominio

$$dom_{tg\, t} = IR - \left\{ t \mid t = \frac{(2n+1)}{2}\pi, \text{con}\, n \in Z \right\}$$

Por la utilidad de las funciones trigonométricas resulta imprescindible conocer el comportamiento de su razón de cambio puntual (es decir, su función derivada) misma que se obtiene utilizando:

i. La definición de función derivada, $f'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

ii. El límite $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{sen(\Delta t)}{\Delta t}$

iii. El uso adecuado y manipulación de ciertas identidades trigonométricas.

PROPIEDAD 1.1 FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Si $t \in IR = (-\infty, +\infty)$ y:

i. Si $f(t) = sen(t)$, entonces, $f'(t) = cos(t)$

ii. Si $f(t) = cos(t)$, entonces, $f'(t) = -sen(t)$

NOTA

En lo sucesivo en lugar de $f(x) = sen(x)$ y $f(x) = cos(x)$ escribiremos $f(x) = sen\, x$ y $f(x) = cos\, x$ respectivamente.

Con la ***propiedad 1.***, las propiedades operativas de la función derivada, las identidades trigonométricas recíprocas y las identidades trigonométricas pitagóricas obtenemos la *propiedad 2*.

EJEMPLO 2. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Obtén la función derivada.

a. Función derivada asociada a $f(x) = tg\, x$

$f(x) = tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$, entonces, $f'(x) = (tg\, x)' = \left(\dfrac{sen\, x}{cos\, x} \right)'$

Aplicamos la “regla” para obtener la derivada de una división de funciones y simplificamos

$$f'(x)=\frac{(\cos x)(\operatorname{sen} x)'-(\operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2},$$

luego
$$f'(x)=\frac{(\cos x)^2+(\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2}$$

Pero $(\operatorname{sen} x)^2+(\cos x)^2=1$ y $\frac{1}{\cos x}=\sec x$, por tanto,

$$f'(x)=\frac{(\cos x)^2+(\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}=(\sec x)^2$$

b. Función derivada asociada a $f(x)=ctg\ x$

$f(x)=ctg\ x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, entonces, $f'(x)=(ctg\ x)'=\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)'$

Aplicamos la “regla” para obtener la derivada de una división de funciones y simplificamos

$$f'(x)=\frac{(\operatorname{sen} x)(\cos x)'-(\cos x)(\operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x)^2}=\frac{(-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)-(\cos x)(\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$
$$=\frac{-(\operatorname{sen} x)^2-(\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x)^2}=-\frac{(\operatorname{sen} x)^2+(\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x)^2}=-\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

c. Función derivada asociada a $f(x)=\sec x$

$f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$, entonces,

$$f'(x)=\frac{(\cos x)(1)'-(1)(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{0-(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}=\frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^2},$$

entonces,
$$f'(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=(\sec x)(tg\ x)$$

d. Función derivada asociada a $f(x)=\csc x$

En $f(x)=\csc x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ aplicamos la “regla” para obtener la derivada de una división de funciones y simplificamos, $f'(x)=\frac{(\operatorname{sen} x)(1)'-(1)(\cos x)'}{(\operatorname{sen} x)^2}=\frac{0-(\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2}=\frac{-\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2}$,

entonces,
$$f'(x)=\frac{-\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2}=-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=-(\csc x)(ctg\ x)$$

PROPIEDAD 1.2 FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

i. Si $f(x) = tg\ x$, entonces, $f'(x) = (sec\ x)^2$
ii. Si $f(x) = ctg\ x$, entonces, $f'(x) = -(csc\ x)^2$
iii. $f(x) = sec\ x$, entonces, $f'(x) = (sec\ x)(tg\ x)$
iv. $f(x) = csc\ x$, entonces, $f'(x) = -(csc\ x)(ctg\ x)$

Nota.
Las funciones $f'(x) = (sec\ x)^2$ y $f'(x) = -(csc\ x)^2$ también se escriben como

$$f'(x) = sec^2 x \text{ y } f'(x) = -csc^2 x$$

respectivamente.

EJEMPLO 3. DERIVADA DE FUNCIONES CON ELEMENTOS TRIGONOMÉTRICAS

1. Obtén la función derivada indicada**.**

i. Si $f(x) = 4cos\ x - x^2 sen\ x$, entonces,

$$f'(x) = -4sen\ x - \left[x^2 (sen\ x)' + sen\ x \left(x^2\right)' \right] = -4sen\ x - \left[x^2 (cos\ x) + sen\ x\,(2x) \right]$$
$$= -4sen\ x - x^2 cos\ x - 2x\,sen\ x$$

b. Si $f(x) = \left(\frac{1}{4} x^4 sen\ x \right)$, entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left[\left(x^4 sen\ x \right) \right]' = \frac{1}{4}\left[x^4 (sen\ x)' + \frac{1}{4} sen\ x \left(x^4 \right)' \right] = \frac{x^4}{4} cos\ x + x^3 sen\ x$$

c. Si $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - cos\ x}$, entonces,

$$f'(x) = \frac{(x - cos\ x)\left(x^2 + x\right)' - \left(x^2 + x\right)(x - cos\ x)'}{(x - cos\ x)^2}$$
$$= \frac{(x - cos\ x)(2x + 1) - \left(x^2 + x\right)(1 + sen\ x)}{(x - cos\ x)^2}$$

d. Si $f(x) = \frac{tg\ x}{\sqrt{x}}$, entonces,

$$f'(x) = \left(\frac{tg\ x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{\sqrt{x}\,(tg\ x)' - (tg\ x)\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x}\,sec^2 x - \frac{1}{2\sqrt{x}} tg\ x}{x}$$

La “regla de la cadena” se aplica en la obtención de la función derivada asociada a funciones trigonométricas cuyo argumento incluye a la función derivable $u(x)$

PROPIEDAD 1.3 FUNCIÓN DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMPUESTAS

Sea $u(x)$ tal que $u'(x)$ está definida en el dominio de la función trigonométrica, entonces,

i. Si $f(x)=sen\,u(x)$, entonces, $(sen\,u(x))'=[cos\,u(x)]u'(x)$

ii. Si $f(x)=cos\,u(x)$, entonces, $(cos\,u(x))'=-[sen\,u(x)]u'(x)$

iii. Si $f(x)=tg\,u(x)$, entonces, $f'(x)=\left[sec^2 u(x)\right]u'(x)$

iv. Si $f(x)=ctg\,u(x)$, entonces, $f'(x)=-\left[csc^2 u(x)\right]u'(x)$

v. $f(x)=sec\,u(x)$, entonces, $f'(x)=(sec\,u(x))(tg\,u(x))u'(x)$

vi. $f(x)=csc\,u(x)$, entonces, $f'(x)=-(csc\,u(x))(ctg\,u(x))u'(x)$

En el cálculo de derivadas que involucran a funciones trigonométricas son equivalentes las simbologías:

$sen^n\,x$ y $(sen\,x)^n$, $sen\,x^n$ con $sen\left(x^n\right)$ y $sen\,ax$ significa $sen(ax)$

EJEMPLO 4. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMPUESTAS

1.

i. Si $f(x)=4sen\,2x^3=4sen\left(2x^3\right)$, entonces, $u(x)=2x^3$ y $u'(x)=6x^2$, por tanto,

$$f'(x)=4cos\left(2x^3\right)\left(6x^2\right)=24x^2cos\left(8x^3\right)$$

ii. Si $g(x)=(tg\,3x)^5$

$$g'(x)=5(tg\,3x)^4(tg\,3x)'=5(tg\,3x)^4\left(sec^2\,3x\right)(3x)=15x(tg\,3x)^4\left(sec^2\,3x\right)$$

iii. En $h(x)=csc[(5x-2)(cos\,x)]$, entonces,

$$u(x)=(5x-2)cos\,x \text{ y } u'(x)=-(5x-2)sen\,x+5cos\,x \text{, por tanto,}$$

$$h'(x)=-csc[(5x-2)cos\,x]ctg[(5x-2)cos\,x][(5x-2)sen\,x+5cos\,x]$$

iv. Si $i(x)=\sqrt[4]{sen\,x}=(sen\,x)^{\frac{1}{4}}$, entonces,

$$i'(x)=\frac{1}{4}(sen\,x)^{-\frac{3}{4}}(cos\,x)=\frac{cos\,x}{4(sen\,x)^{\frac{3}{4}}}=\frac{cos\,x}{4\sqrt[4]{sen^3 x}}$$

v. $(sen(4+cos\,x))'=(cos(4+cos\,x))(4+cos\,x)'=(cos(4+cos\,x))(-sen\,x)$

$$=(-sen\,x)(cos(4+cos\,x))$$

vi. $\left(cos\left(x^2+5x\right)\right)'=-\left(sen\left(x^2+5x\right)\right)\left(x^2+5x\right)'=-\left(2x+5\right)\left(sen\left(x^2+5x\right)\right)$

vii. $\left(tg\,\frac{1}{2x-1}\right)'=\left(sec\,\frac{1}{2x-1}\right)^2\left(\frac{1}{2x-1}\right)'=\left(sec\,\frac{1}{2x-1}\right)^2\left(\frac{-2}{(2x-1)^2}\right)$

$$=-\frac{2}{(2x-1)^2}\left(sec\,\frac{1}{2x-1}\right)^2$$

viii. $\left(sec\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(sec\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(tg\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(sec\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(tg\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\left(sec\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(tg\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

ix. $\left(csc\left(sen\,x\right)\right)'=-\left(csc\left(sen\,x\right)\right)\left(ctg\left(sen\,x\right)\right)\left(sen\,x\right)'$

$$=-\left(csc\left(sen\,x\right)\right)\left(ctg\left(sen\,x\right)\right)\left(cos\,x\right)$$

El ***ejemplo 5***. presenta ciertos casos en que se requiere obtener la función derivada de una función trigonométrica.

EJEMPLO 5. APLICACIONES DE LA DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a. La función $f(t)=2sen2t$ describe la posición de un trozo de madera que flota en la superficie del agua, por tanto, su función derivada $f'(t)=4cos2t$ describe su rapidez al instante t

i. La rapidez del trozo de madera a los $t=0$ segundos es $f'(0)=4cos2(0)=4$ cm/s

ii. La rapidez del trozo de madera a los $t=\frac{\pi}{2}$ segundos es $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2cos2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4$ cm/s

iii. La rapidez del trozo de madera a los $t=\pi$ segundos es $f'(\pi)=4cos2(\pi)=4$ cm/s

b. Una “rueda de la fortuna” tiene 10 metros de radio y rota en sentido levógiro (contrario al movimiento de las manecillas de un reloj), con velocidad angular de 2 radianes por segundo.

i. El desplazamiento vertical de una canastilla respecto a la horizontal (que contiene al centro) está dado por la función

$$y(\theta)=10sen\,\theta$$

ii. Si su ángulo de rotación depende del tiempo, es decir, $\theta=\theta(t)$, entonces,

$$y(t)=10sen\,\theta(t)$$

iii. La función que describe la rapidez de la canastilla es

$$y'(t)=[10\,cos\,\theta(t)]\theta'(t)\text{, o bien, } y'(t)=20cos(t)\text{ m/s}$$

iv. La rapidez del desplazamiento vertical de la canastilla al transcurrir $t=\pi$ segundos es

$$y'(\pi)=20cos(\pi)=20 \text{ m/s}$$

v. El desplazamiento horizontal de una canastilla (respecto a la vertical que contiene al centro de la rueda) es

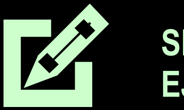
$$x(\theta)=10cos\,\theta,$$

pero el ángulo de rotación depende del tiempo, es decir, $\theta=\theta(t)$, por tanto,

$$x(t)=10cos\theta(t)$$

vi. La rapidez de desplazamiento horizontal de la canastilla es

$$x'(t)=[-10sen\,t]\theta'(t), \text{ o bien, } x'(t)=-20sen\,t$$



SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS 1

1. Deriva:

i. $f(x)=8sen\,x+5x$

ii. $f(x)=x^4+2cos\,x$

iii. $f(x)=6tg\,x-5sec\,x$

iv. $f(x)=\sqrt[3]{x}+8sen\,x$

v. $f(x)=4sec\,x\,tg\,x$

vi. $f(x)=-4csc\,x-8ctg\,x$

vii. $f(x)=\dfrac{cos\,x-1}{x}$

viii. $f(x)=-8\,cos\,x-5\,tg\,x$

ix. $f(t)=2sen\,t\,cos\,t$

x. $f(t)=t^{-2}ctg\,t$

xi. $f(w)=2sec\,w\,csc\,w$

2. Sin utilizar la regla de la cadena obtén la función derivada.

i. $f(x)=sen^2\,x+cos^2x$

ii. $f(x)=sen(2x)$

iii. $f(x)=sen\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-cos^2x}}$

v. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-sen^2 x}}$

3. Obtén la función derivada.

i. $f(u)=cos\left(u^3+4u\right)$

ii. $f(x)=sen\,x^5$

iii. $f(t)=tg\,t^4$

iv. $f(x)=(tg\,x)^4$

v. $f(r)=r^2 sen^3(3r+6)$

vi. $f(x)=-cos\sqrt{3x^2+1}$

vii $f(x)=(1+2x)sec\left(x^4+4\right)$

viii. $f(x)=sen\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

ix. $f(x)=\dfrac{cos\,x^2}{sen\,x^2-1}$

x. $f(x)=\dfrac{1+tg\,x}{cos\,x}$

xi. $f(t)=(sen\,t+cos\,t)^4$

xii. $f(x)=\left(\dfrac{cos\,x}{1-sen^2\,x}\right)^3$

xiii. $f(t)=\dfrac{sen\,t^2}{sen^2 t}$

4. Determina la ecuación de la línea recta que es tangente a la curva asociada a f.

i. $f(x)=x+cos\,x$ en $P(0\,,1)$ $x-y+1=0$

ii. $f(x)=2sen\,x$ si $x=\dfrac{\pi}{2}$ $y-2=0$

5. Comprueba:

i. $y=cos\,x$ satisface la ecuación $y''+y=0$

ii. $y=sen\,ax$ satisface la ecuación $y''+a^2y=0$

6. En cierta región la temperatura (grados centígrados) se comporta de acuerdo a la función $T(t)=22+4\,sen\,\dfrac{\pi t}{12}$, calcula la rapidez con que cambia a los 4 segundos.

7. Un objeto se encuentra sujeto al extremo de un resorte, mismo que cuelga de una viga, su posición vertical está dada por $f(t)=\cos t$ determine la velocidad del objeto en el tiempo t.

8. El desplazamiento de su posición de equilibrio para un movimiento armónico de un objeto situado al extremo de un muelle es $f(t)=\frac{1}{4}\cos 12t-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 12t$, con t en segundos y $f(t)$ en metros, determina la posición y la velocidad del objeto a los $t=\frac{\pi}{8}$ segundos.

1.2 DERIVADA DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

APRENDIZAJES

6. Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos.
7. Infiere la derivada de las funciones logarítmicas.
8. Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas
9. Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos.

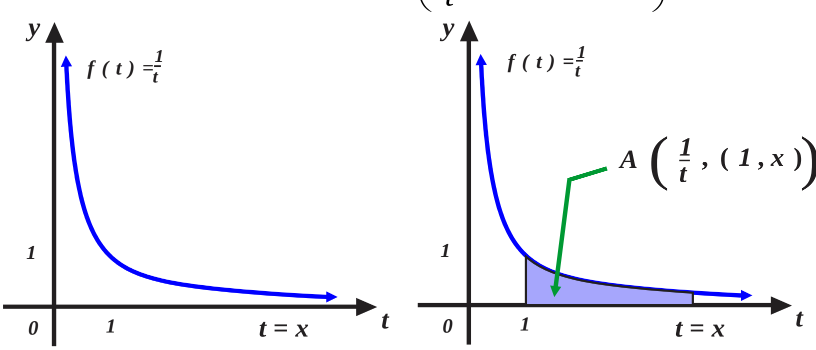
Las funciones exponenciales y logarítmicas son básicas en la descripción de fenómenos relacionados con el crecimiento o decrecimiento de: poblaciones, de sustancias, capitales, temperaturas de objetos, etcétera.

La función logaritmo natural puede ser definida de distintas formas (todas equivalentes entre sí), sin embargo, una de las más ilustrativas es en términos del área de una región en el plano cartesiano.

a. La *figura* muestra:

i. La curva asociada a la función $f(t)=\frac{1}{t}$, si $t>0$ (dominio el intervalo $(0,+\infty)$).

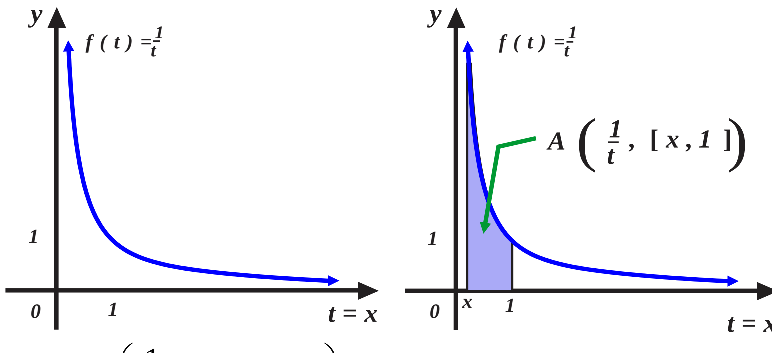
ii. La región del plano cartesiano limitada por: la curva asociada a la función $f(t)=\frac{1}{t}$ sobre el intervalo $[x,1]$, el eje de las abscisas, las líneas rectas verticales de ecuaciones $t=1$ y $t=x$, (observa que $x>1$), que representaremos con $A\left(\frac{1}{t},\ (1,+\infty)\right)$



b. La *figura* muestra

i. La curva asociada a la función $f(t)=\frac{1}{t}$ definida sobre el intervalo $(0,+\infty)$

ii. La región del plano cartesiano limitada por: la curva asociada a la función $f(t)=\frac{1}{t}$ sobre el intervalo $[x,1]$, el eje de las abscisas y la línea recta vertical de ecuación $t=1$, (observa que $0<x<1$),

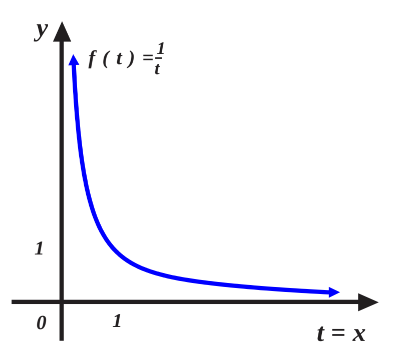


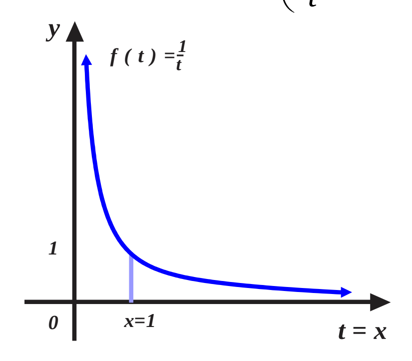
la representaremos con $A\left(\frac{1}{t},\ (x,1)\right)$

c. La *figura* muestra:

i. La curva asociada a la función $f(t)=\frac{1}{t}$ sobre el intervalo $[1,1]$

ii. La región del plano cartesiano limitada por: el eje de las abscisas, las líneas rectas verticales de ecuaciones $t=x$ y $t=1$ (observa que $x>1$), la representaremos por $A\left(\frac{1}{t},\ x=1\right)$





DEFINICIÓN 1.1 FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Si $t\in IR=(-\infty,+\infty)$ y:

SI x es un número real positivo, entonces, la función

$$f(x)=ln(x)=\begin{cases} -A\left(\frac{1}{t},\ (0,x)\right), \text{ si } 0<x<1 \\ A\left(\frac{1}{t},\ [1,x]\right), \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$$

se llama "logaritmo natural"

La función $f(x)=ln(x)$ representa el área "orientada" de la región del plano cartesiano limitada por la curva asociada a la función $f(t)=\frac{1}{t}$ sobre el intervalo $(0,x)$ y el eje de las abscisas, entre sus propiedades destacan las señaladas en la ***propiedad 1.1***.

PROPIEDAD 1.1 PROPIEDADES OPERATIVAS DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Sean a y b son números reales positivos, entonces,

i. $ln(1)=0$

ii. $ln(a\cdot b)=ln(a)+ln(b)$

iii. Si n es un número real, entonces, $ln\left(a^n\right)=n\cdot ln(a)$

iv. $ln\left(\frac{1}{a}\right)=-ln(a)$

v. $ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln(a)-ln(b)$

La función $f(x) = ln(x)$ también se escribe como $f(x) = ln\ x$ y tiene como dominio al intervalo $(0, +\infty)$, es derivable, su función derivada se puede obtener de distintas formas, sin embargo todas ellas conducen a la ***propiedad 1.2***.

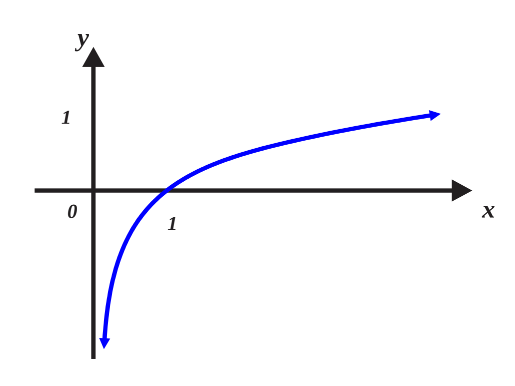
PROPIEDAD 1.2 FUNCIÓN DERIVADA DE $f(x) = ln\ x$

$f(x) = ln\ x$, entonces, $(ln\ x)' = \dfrac{1}{x}$, siempre que $x > 0$

El trazo de la curva asociad a

$$f(x) = ln\ x$$

se realiza utilizando los métodos respectivos del cálculo diferencial (cero, primera y segunda función derivada) obteniéndose la siguiente *figura*.



FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

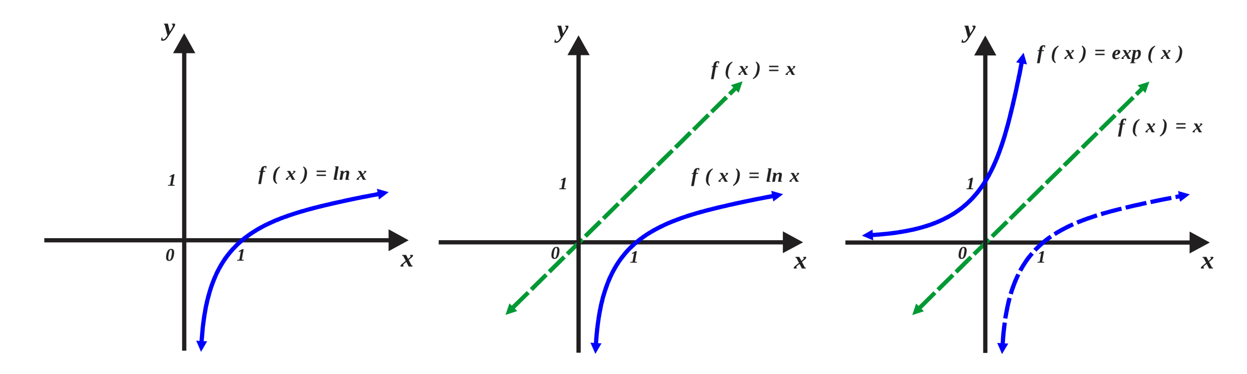
Representaremos con $f(x) = exp(x)$ a la función inversa de $f(x) = ln\ x$, *la figura* ilustra la relación entre existente entre funciones.

$$IR^+ \xrightarrow{ln\ x} IR \qquad\qquad IR \xrightarrow{exp(x)} IR^+$$

Las funciones $f(x) = exp(x)$ y $f(x) = ln(x)$ son invertibles y una de ellas es la inversa de la otra, esto significa:

$$ln(exp(x)) = x = exp(ln(x))$$

Por tanto, la curva asociada a $f(x) = exp(x)$ se obtiene reflejando la curva asociada a $f(x) = ln(x)$ respecto a la línea recta de ecuación $y = x$, siguiente ***figura***.



Por el carácter de inverso de las funciones $f(x) = exp(x)$ y $f(x) = ln\ x$, ***la propiedad 1.1*** de la segunda de ellas se escribe en términos de la función exponencial natural como lo muestra la ***propiedad 1.3***.

PROPIEDAD 1.3 PROPIEDADES OPERATIVAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Sean a y b son números reales positivos, entonces,

i. $f(0) = exp(0) = 1$

ii. $exp(a+b) = exp(a) \cdot exp(b)$

iii. Si n es un número real, entonces, $exp(a) = \dfrac{1}{exp(-a)}$

iv. $exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}$

La representación más común de la función exponencial es en términos del número de Euler tal como lo establece la ***definición 1.2***.

DEFINICIÓN 1.2 REDEFINIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

i. Se define el número e como $e = exp(1)$

ii. Rescribimos la función exponencial natural como $f(x) = exp(x) = e^x$

Puesto que $f\left(e^x\right) = ln\left(e^x\right) = x$, entonces, $ln\left(e^x\right) = x$, la derivación de ambos lados y el uso de la regla de la cadena da $\dfrac{1}{e^x}\left(e^x\right)' = 1$, lo que implica $\left(e^x\right)' = e^x$

PROPIEDAD 1.4 FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADAA LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Si x es un número real y $f(x) = e^x$, entonces, $f'(x) = e^x$, o bien, $\left(e^x\right)' = e^x$

Las propiedades anteriores pueden generalizarse para funciones exponenciales y/o logarítmicas con base distinta a la natural. Las funciones $f(x) = ln(x)$ y $f(x) = e^x$ son invertibles e inversas relativas entre sí ($ln\left(e^x\right) = e^{ln(x)} = x$), en particular, si en lugar del número a utilizamos a^x tendremos $\left[e^{ln\left(a^x\right)}\right] = \left[e^{x\,ln\,a}\right] = \left[e^{l \cdot n\,a}\right]^x = a^x$

Si $z = log_a(x)$, entonces, $x = a^z$. Aplicamos la función logaritmo natural a $a^z = x$, obtenemos $ln\,x = z \cdot ln\,a$, o bien, $z = \dfrac{ln\,x}{ln\,a}$, pero $z = log_a(x)$, por tanto, $z = log_a(x) = \dfrac{ln\,x}{ln\,a}$

PROPIEDAD 1.5 CAMBIO A BASE NATURAL

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces,

i. $f(x) = a^x = e^{x \cdot ln(a)}$

ii. $f(x) = log_a(x) = \dfrac{ln\,x}{ln\,a}$

EJEMPLO 1. CAMBIOS DE BASE

1. Rescribamos con base natural.

a.

i. $f(x)=7^x$ escrita con base natural es $f(x)=7^x=e^{x\cdot ln(7)}$

ii. $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ escrita con base natural es $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x=e^{x\cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

iii. $f(x)=(0.8)^x$ escrita con base natural es $f(x)=(0.8)^x=e^{x\cdot ln(0.8)}$

b. i. La función $f(x)=log_5\ x$, rescrita en base natural es $f(x)=log_5\ x=\frac{1}{ln 5}ln\, x$

ii. La función $f(x)=log_2\ x$, en base natural es $f(x)=log_2\ x=\frac{1}{ln\ 2}ln\ x$

iii. La función $f(x)=log_{\left(\frac{7}{6}\right)}\ x$, con base natural es $f(x)=log_{\left(\frac{7}{6}\right)}\ x=\frac{1}{ln\left(\frac{7}{6}\right)}ln\ x$

Con $(ln\ x)'=\frac{1}{x}$, $\left(e^x\right)'=e^x$, la ***propiedad 1.5***, cambio de base y la regla de la cadena se obtiene la "función derivada" de funciones exponenciales y logarítmicas con base distinta al número de Euler.

PROPIEDAD 1.6 DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Si $a>0$, $a\neq 1$, y:

i. $f(x)=log_a(x)$, entonces, $f'(x)=\frac{1}{x\cdot ln\ a}$

ii. $f(x)=a^x=e^{x\cdot ln(a)}$, entonces, $f'(x)=a^x ln(a)$

EJEMPLO 2. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Obtengamos la función derivada.

a.

i. Si $f(x)=log_6 x$, entonces, $f'(x)=\frac{1}{(ln\,6)x}$

ii. Si $f(x)=log_{\frac{1}{5}}x$, entonces, $f'(x)=\dfrac{1}{\left(ln\frac{1}{5}\right)x}$

iii. Si $f(x)=log_{0.2}x$, entonces, $f'(x)=\dfrac{1}{(ln\,0.2)x}$

b.

i. Si $f(x)=6^x$, entonces, $f'(x)=6^x(ln\,6)$

ii. Si $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, entonces, $f'(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x ln\left(\frac{3}{2}\right)$

iii. Si $f(x)=(\pi)^x$, entonces, $f'(x)=(\pi)^x ln(\pi)$

iv. Si $f(x)=(0.24)^x$, entonces, $f'(x)=(0.24)^x ln(0.24)$

El cálculo de derivadas de funciones que contienen “partes” exponenciales y/o logarítmicos se efectúa de acuerdo a las reglas (teoremas) de derivación antes tratados, en particular la regla de la cadena. Sea $u=u(x)$, para derivar las funciones $f=a^u$ y $f=log_a u$ se utiliza la “regla de la cadena”,

Si $f=a^u$, entonces: **i.** $f'=u'a^u(ln\,a)$ y **ii.** Si $f=log_a u$, entonces, $f'=\dfrac{u'}{u(ln\,a)}$

EJEMPLO 3. DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS COMPUESTAS

1. Obtengamos la función derivada.

i. En $f(x)=ln\left(3x^3-4x^2-6\right)$, sea $u(x)=3x^3-4x-6$, entonces,

$$u'(x)=9x^2-4 \text{ y } f'(x)=\frac{9x^2-4}{3x^3-4x^2-6}$$

ii. En $f(x)=\left(ln\,x+\frac{4}{x}\right)^5$, sea $u(x)=ln\,x+\frac{4}{x}$, luego

$$u'(x)=\frac{1}{x}-4 \text{ y } f'(x)=5\left(ln\,x+\frac{1}{x}\right)^4\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$

iii. En $f(x) = ln\sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}ln\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)$, sea $u(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$, entonces,

$$u'(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} \text{ y } f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)}$$

iv. Para derivar $f(x) = x\, log_2\left(sen\, x + \frac{1}{5}x^5\right)$, sea $u(x) = sen\, x + \frac{1}{5}x^5$, entonces,

$$u'(x) = cos\, x + x^4 \text{ y } \left[log_2\left(sen\, x + \frac{1}{5}x^5\right)\right]' = \frac{cos x + x^4}{\left(sen\, x + \frac{1}{5}x^5\right)(ln\, 2)}$$

$$f'(x) = x\left[\frac{cos x + x^4}{\left(sen\, x + \frac{1}{5}x^5\right)(ln\, 2)}\right] + log_2\left(sen\, x + \frac{1}{5}x^5\right)$$

EJEMPLO 4. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES COMPUESTAS

1. Obtengamos la función derivada.

i. La función derivada de $f(x) = 10^{cos\, x}$ es

$$f'(x) = (ln 10)10^{cos\, x}(cos\, x)' = -(ln 10)(sen\, x)10^{cos\, x}$$

ii. Para derivar $f(x) = 8^{x^2+5x+2}$, sea $u(x) = x^2 + 5x + 2$, entonces,

$$u'(x) = 2x + 5 \text{ y } f'(x) = (2x+5)8^{x^2+5x+2}(ln\, 8)$$

iii. En $f(x) = 8\, e^{12x - sen\, x}$, sea $u(x) = 12x + sen 4x$, entonces,

$$u'(x) = 12 - 4cos\, x \text{ y } f'(x) = 8(12 - cos\, x)e^{3x - sen\, x}$$

iv. En $f(x) = 5^{4x - tg\, x}x$, sea $u(x) = 4x - tg\, x$,
entonces,

$$u'(x) = 4 - sec^2\, x \text{ y } \left(5^{4x-tg\, x}\right)' = 5^{x^2 - tg\, x}(ln\, 5)(4 - sec^2 x)$$

por tanto,

$$f'(x) = 5^{4x-tg\, x} + x\left[5^{x^2-tg\, x}(ln\, 5)(4 - sec^2 x)\right]$$

v. En $f(x)=6^{-\frac{1}{x^2+4}}$, sea $u(x)=-\frac{1}{x^2+4}$, entonces,

$$u'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2} \text{ y } f'(x)=\frac{12x(\ln 6)^{-\frac{1}{x^2+4}}}{\left(x^2+4\right)^2}$$

EJEMPLO 5. DOS APLICACIONES

1.

a. Sea M la masa de un elemento radiactivo, t el tiempo transcurrido hasta que se desintegra una fracción de él, y $M(t)=M_0e^{-\lambda t}$ donde M_0 y λ (letra griega lambda) son constantes el modelo que describe el comportamiento correspondiente.

i. Si $t=0$, entonces, $M(0)=M_0e^{-\lambda(0)}=M_0$, por tanto, M_0 es la cantidad inicial de masa. La constante λ, depende del elemento particular que se esté tratando, se conoce como constante de decaimiento.

ii. La función $M'(t)=-\lambda M_0e^{-\lambda t}$ indica la rapidez de desintegración de la masa del elemento radiactivo.

iii. Si $M_0=10$ gramos, $\lambda=0.2$ horas, entonces, $M(t)=10e^{-0.2t}$ y $M'(t)=10e^{-0.2t}$ indica la rapidez de desintegración instantánea en el tiempo t.

iv. Si $t=5$ horas, entonces, la masa se está desintegrando con rapidez

$$M'(5)=10e^{-0.2(5)}=\frac{10}{e} \text{ gr/ hora.}$$

b. La función $T(t)=74e^{\frac{1}{4}ln\left(\frac{15}{37}\right)t}+20$ (t en minutos) describe la temperatura de una papa que inicialmente se encontraba a $94°C$ y se colocó en un recipiente con agua a temperatura constante de $20°C$ con el objeto de enfriarla.

Así, la función $T'(t)=\frac{37}{2}ln\left(\frac{15}{37}\right)e^{\frac{1}{4}ln\left(\frac{15}{37}\right)t}$ describe la rapidez de cambio de la temperatura de la papa en el instante t.

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 1

1. Simplifica.

i. $f(x) = lne^{5x}$

ii. $f(x) = lne^{4x-3}$

iii. $f(x) = e^{\frac{1}{4}ln\,x}$

iv. $f(x) = e^{-\frac{5}{4}ln\,x}$

v. $f(x) = log_4 4^{2x}$

vi. $f(x) = 8^{3log_8 x}$

vii. $f(x) = log_8 8^{\frac{1}{3}log\,x}$

viii. $f(x) = 6^{-\frac{1}{4}log_6 x}$

ix. $f(x) = 7^{-2log_7 x}$

2. Rescribe con base natural y luego obtén la función derivada.

i. $f(x) = log_4 x$

ii. $f(x) = log_6 x$

iii. $f(x) = log_2(x^2 - 6)$

iv. $f(x) = log_{\frac{1}{4}}(3 + sen\,x)$

v. $f(x) = ln(x\sqrt{x} + 5x)$

3. Obtén la función derivada.

i. $f(x) = ln(x^3 + 2x^2 + x - 2)$

ii. $f(x) = log_2 \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$

iii. $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

iv. $f(x) = ln\left(5 - \frac{4}{x+1}\right)$

v. $f(x) = log_6(1 + 3sen2x)$

4. Rescribe con base natural y luego obtén la función derivada.

i. $f(x) = 4^x$ $f'(x) = 4^x(ln4)$

ii. $f(x)=2^{\sqrt{x}}$
iii. $f(x)=4e^{x}$
iv. $f(x)=2^{-3x+x^{3}}$
v. $f(x)=7^{\frac{1}{x}}$
vi. $f(x)=x^{x}$
vii. $f(x)=x^{sen\,x}$
viii. $f(x)=(cos\,x)^{x}$

5. Obtén la función derivada.
i. $f(x)=x^{4}e^{2x}$
ii. $f(x)=e^{x}cos\,3x$
iii. $f(x)=\left(3-\sqrt{x}\right)e^{4x}$
iv. $f(x)=e^{-x}sen\,2x$
v. $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$
vi. $f(x)=\dfrac{e^{x}}{4+e^{x}}$
vii. $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
viii. $f(x)=\left(sen^{2}x\right)ln(x-1)$
ix. $f(x)=e^{5x}ln(1+cos\,x)$
x. $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)ln(x+3)}$

6. Determina la ecuación de la línea recta tangente a la curva asociada a:
i. $f(x)=3e^{x}$ si $x=1$
ii. $f(x)=xe^{2x}$ si $x=2$
iii. $f(x)=x\,ln(x-2)$ si $x=3$
iv. $f(x)=x^{2}-ln\,x$ si $x=1$

7. Una taza con café se enfrió de $92°C$ a $50°C$ en 12 minutos en una habitación que se encontraba a $22°C$. Supón que el modelo que describe el comportamiento de la temperatura en términos del tiempo es $T(t)=70e^{\frac{1}{12}ln\frac{2}{5}t}+22$. Obtén la rapidez de cambio de la temperatura del café a los 18 minutos.

8. El motor de un camión se calentó a $70°C$ por lo que inmediatamente se introdujo a un cuarto que se encontraba a una temperatura de $10°C$. La temperatura del motor del camión bajo a $30°C$ en un lapso de 30 minutos. Supón que el modelo que describe el comportamiento de la temperatura del motor del camión como función del tiempo es $T\left(t \right) = 60e^{\frac{1}{30} ln \frac{1}{3} t} + 10$. Obtén la rapidez con la que está cambiando la temperatura del camión a los 30 minutos de introducido en el cuarto.

1.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN



SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD 1

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1.

i. $f'(x)=8\cos x+5$

ii. $f'(x)=4x^3-2sen\,x$

iii. $f'(x)=6sec^2x-4sec\,x\,tg\,x$

iv. $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+8\cos x$

v. $f'(x)=4sec^3\,x+4sec\,x\,tg^2\,x$

vi. $f'(x)=4sec\,x\,ctg\,x+8csc^2\,x$

vii. $f'(x)=\dfrac{1-xsenx-\cos x}{x^2}$

viii. $f'(x)=8\,sen\,x-5\,sec^2x$

ix. $f'(t)=\cos 2t$

x. $f'(t)=-\dfrac{2ctg\,t}{t^3}-\dfrac{csc^2t}{t^2}$

xi. $f'(w)=2\left(sec^2w-\csc^2w\right)$

2.

i. $f'(x)=0$

ii. $f'(x)=2\cos(2x)$

iii. $f'(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv. $f'(x)=-csc\,x\,ctg\,x$

v. $f'(x)=sec x\,tg\,x$

3.

i. $f'(u)=-\left(3u^2+4\right)sen\left(u^3+4u\right)$

ii. $f'(x)=5x^4\cos\left(x^5\right)$

iii. $f'(t)=4t^3sec^2\left(t^4\right)$

iv. $f'(x)=4\,(tg\,x)^3sec^2x$

v. $f'(r)=2r\,sen^3\,(3r+6)$
$+9r^2\,sen^2\,(3r+6)\cos\,(3r+6)$

vi. $f'(x)=\dfrac{2sen\left(\sqrt{3x^2+1}\right)}{\sqrt{3x^2+1}}$

vii. $f'(x)=2sec\left(x^4+5\right)$
$+4x^3(1+2x)sec\left(x^4+5\right)tg\left(x^4+5\right)$

viii. $f'(x)=-\dfrac{2\cos\left(\dfrac{x}{x+x}\right)}{(x+2)^2}$

ix.
$f'(x)=\dfrac{-2x\cos x^2\left(sen\,x^2-1\right)-2x\cos^2x^2}{\left(sen\,x^2-1\right)^2}$

x. $f'(x)=\dfrac{sec\,x+\left(1+tg\,x\right)sen\,x}{\cos^2x}$

xi. $f'(t)=4\left(sen\,t+\cos t\right)^3\left(\cos t-sen\,t\right)$

xii. $f'(x)=3sec^3x\,tg\,x$

xiii. $f'(x)=-2sec^2x\,ctg\,x\,sen\,x^2x$
$+2x\csc^2x\cos x^2$

4. i. $x-y+1=0$ **ii.** $x=\dfrac{\pi}{2}\;y-2=0$

5. $T'(4)=\dfrac{\pi}{6}$ **6.** $f'(t)=-sent$ **7.** $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{6}\;f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=3$ m/s.

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. i. $f(x)=5x$ **ii.** $f(x)=4x-3$ **iii.** $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ **iv.** $f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}$ **v.** $f(x)=2x$

vi. $f(x)=x^{3}$ **vii.** $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ **viii.** $f(x)=x^{-\frac{1}{4}}$ **ix.** $f(x)=x^{-2}$

2. i. $f'(x)=\dfrac{1}{x(ln4)}$ **ii.** $f'(x)=\dfrac{1}{x(ln6)}$ **iii.** $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^{2}-6)(ln2)}$

iv. $f'(x)=\dfrac{\cos x}{(3+senx)ln\left(\frac{1}{4}\right)}$ **v.** $f'(x)=\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+5x)}$

3. i. $f'(x)=\dfrac{3x^{2}+4x+1}{x^{3}+2x^{2}+x-2}$ **ii.** $f'(x)=\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x+1}(x+1)^{\frac{2}{3}}(ln2)}$

iii. $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ **iv.** $f'(x)=\dfrac{5}{(5x+1)(x+1)}$ **v.** $f'(x)=\dfrac{6\cos 2x}{(1+3sen2x)(ln6)}$

4. i. $f'(x)=4^{x}(ln4)$ **ii.** $f'(x)=\dfrac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}(ln2)$ **iii.** $f'(x)=4e^{x}$

iv. $f'(x)=2^{-3x+x^{3}}(-3+3x^{2})(ln2)$ **v.** $f'(x)=-\dfrac{7^{\frac{1}{x}}(ln7)}{x^{2}}$ **vi.** $f'(x)=x^{x}(ln x+1)$

vii. $f'(x)=x^{sen\,x}\left((\cos x)(ln x)+\dfrac{senx}{x}\right)$ **viii.** $f'(x)=(\cos x)^{x}(ln\cos x-x\,tg\,x)$

5. i. $f'(x)=4x^{3}e^{2x}+2x^{4}e^{2x}$ **ii.** $f'(x)=e^{x}(\cos 3x-3sen3x)$

iii. $f'(x)=4(3-\sqrt{x})e^{4x}-\dfrac{e^{4x}}{2\sqrt{x}}$ **iv.** $f'(x)=e^{-x}(2\cos 2x-sen2x)$

v. $f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}e^{-x}$ **vii.** $f'(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ **vi.** $f'(x)=\dfrac{4e^{x}}{(4+e^{x})^{2}}$

viii. $f'(x)=(sen2x)ln(x-1)+\dfrac{sen^{2}x}{x-1}$ **ix.** $f'(x)=5e^{5x}ln(1+\cos x)-\dfrac{e^{5x}senx}{1+\cos x}$

x. $f'(x)=-\dfrac{ln(x+3)+1}{(x+3)^{2}ln^{2}(x+3)}$

6. i. $3ex-y=0$ **ii.** $5e^{4}x-y-8e^{4}=0$ **iii.** $3x-y-9=0$ **iv.** $x-y=0$

7. $T'(12)=\dfrac{7}{3}ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$ **8.** $T'(30)=-\dfrac{1}{3}ln(3)$

EXAMEN

UNIDAD 1

CONCEPTOS

1. La función derivada asociada a la función periódica $f(x) = sen\, x$ es

2. La función derivada de la función compuesta $f(x) = tg\, u(x)$ es la función

3. La función derivada asociada a una función trigonométrica es

4. ¿Qué describe la función $f(x) = ln\, x$?

5. ¿Quiénes son el dominio y el recorrido de la función $f(x) = ln\, x$?

6. Las funciones $f(x) = ln\, x$ y $f(x) = log_a x$ se relacionan mediante

7. Las función $f(x) = ln\, x$ y $f(x) = e^x$ se relacionan porque son

8. ¿Cómo se relacionan las funciones $f(x)=a^x$ y $f(x)=e^x$?

9. ¿Por qué $e^0=1$?

DESARROLLOS OPERATIVOS

10. Obtén la función derivada $f(x)=x^2 cos(sen x)$

11. Obtén la función derivada en el número indicado $f(x)=3^x tg\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$, si $x=0$

12. Obtén la función derivada en el número indicado $f(x)=log_4(2-x^2)+3^x tg\, x$, si $x=1$

13. Obtén la función derivada en el número indicado $f(x)=x^{-2x+3}(e^{4x-3})$, si $x=1$

PARA PENSAR

14. La longitud de la hipotenusa de un triángulo es 5 unidades. Construye la función que describe la rapidez con que cambia su altura como función del ángulo que se le opone.

15. El desplazamiento de un bloque es un movimiento armónico simple, desde su posición de equilibrio es $f(t)=\frac{1}{4}cos\,12t-\frac{1}{6}sen\,12t$ (t en segundos y $f(t)$ en metros), calcula la rapidez con que se desplaza el objeto cuando $t=\frac{\pi}{8}$ segundos.

16. Un "celular" tiene un precio inicial de $40{,}000$ pesos, su precio se devalúa el 25% anualmente. Obtén el modelo que describe la rapidez de de cambio del costo del "celular" como función del tiempo.

17. Un individuo (mediante la orina) elimina el 30% diario de una droga que ha consumido; el individuo ha consumido 4 gramos de esa droga. Sea $D(t)$ la cantidad de droga presente en el individuo en el tiempo t. Construye el modelo que describe la rapidez con que cambia el tiempo como función de la cantidad de droga en el instantáneo (es decir, $t'(D)$)



ESCALA

Preguntas 1 a 9., un punto cada una.
Problemas 10. a 13. tres puntos cada uno.
Problemas 14. a 17. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se necesitan 23 o más puntos



UNIDAD 1 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. la función periódica $f(x) = cos\, x$

2. la función $f(x) = u'(x) sec^2 u(x)$

3. una función trigonométrica.

4. El área de una región del ´plano cartesiano.

5. $(0, +\infty)$ y $(-\infty, +\infty)$

6. $log_a x = \frac{ln\, x}{ln\, a}$

7. invertibles e inversas relativas.

8. $f(x) = a^x = e^{x ln\, a}$

9. Lo garantiza el hecho $ln\, 1 = 0$

DESARROLLOS OPERATIVOS

10. $2x cos(senx) - x^2 sen(senx) cos\, x$

11. $ln(3) tg(2) - sec^2(2)$

12. $-\frac{1}{ln(2)} 3^{tg(1)} ln(3)\left(tg(1) - sec^2(1)\right)$

13. $5e$

PARA PENSAR

14. $h'(x) = 5cos\, x$

15. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3$ metros por segundo.

16. $p'(t) = 40{,}000(0.75)^t ln(0.75)$

17. $t'(D) = \frac{4}{\frac{D}{4} ln(0.7)}$

2. LA INTEGRAL DEFINIDA

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno:

Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado.

Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema fundamental del Cálculo y lo aplicará.



Curva en el plano cartesiano. Representación de los puntos $(x\ ,\ y)$ en el plano cartesiano.

Región en el plano cartesiano. Parte del plano cartesiano acotada por curvas.

Área de una región en el plano cartesiano. Número de unidades cuadradas en una región del plano cartesiano.

Partición de un intervalo. Conjunto de puntos que pertenecen al intervalo y lo dividen en subintervalos.

Partición regular. Conjunto de puntos que dividen a un intervalos en subintervalos de la misma longitud.

Rectángulo inscrito en una región del plano cartesiano. Dos de los vértices del rectángulo se encuentran en el eje de las abscisas, un vértice en la curva asociada a la función y el otro en el interior de la región.

Rectángulo circunscrito. Dos de los vértices del rectángulo se encuentran en el eje de las abscisas, un vértice en la curva asociada a la función y el otro en el exterior de la región.

Suma de Riemann Cauchy. Resultado de aproximar una integral utilizando rectángulos que tienen como bases los intervalos generados por una partición y como altura la imagen de un punto del intervalo.

Función derivada. La función que se obtiene al aplicarle el “operador” derivada.

Función integral. La función que se obtiene al aplicarle el “operador” integral a una función definida sobre un intervalo en el que uno de sus extremos es variable..

2.1 ÁREA DE UNA REGIÓN DEL PLANO CARTESIANO, LA INTEGRAL DEFINIDA

APRENDIZAJES

El alumno:

1. Asocia el área bajo una curva con la solución de una situación dada en diversos contextos.
2. Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma [0 , x] y calcula con ella el área en el intervalo [a , b].
3. Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de áreas a través de rectángulos inscritos y circunscritos y reconoce esta aproximación como un método general.
4. Relaciona el método de aproximación numérica para calcular el área con un proceso infinito.
5. Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$ como un límite de sumas infinitas para n = 1, 2 y 3.

El área de una región del plano cartesiano es la medida de una región en el plano cartesiano (o función) y puede interpretarse en términos de las unidades de las variables que definen los ejes coordenados.

EJEMPLO 1. INTERPRETACIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN DEL PLANO CARTESIANO

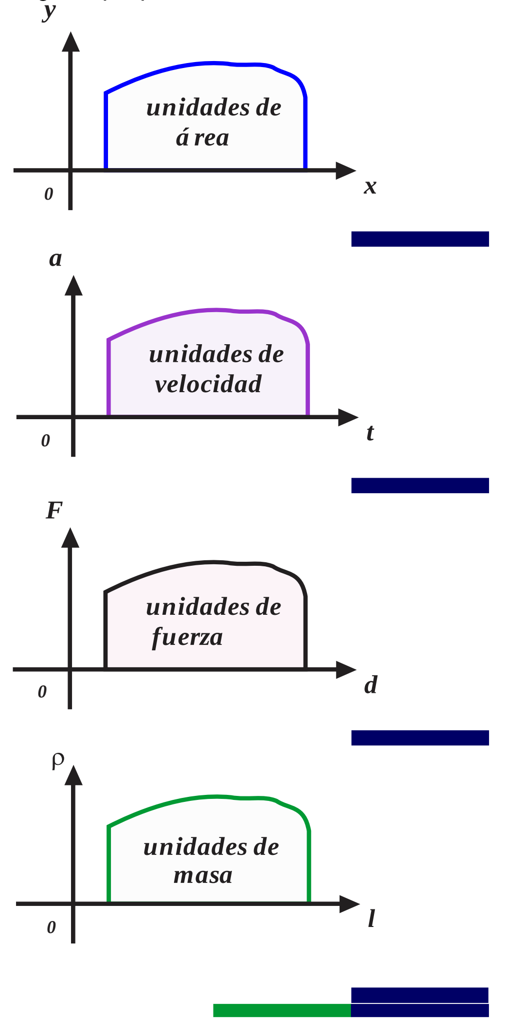
1. Si suponemos que las variables en consideración tiene el signo apropiado:

a. En un diagrama $x-y$, si ambas variables representan longitudes, entonces el producto $x \cdot y$ tiene unidades de área.

b. En el diagrama de tiempo t (en segundos) contra aceleración a en $(m \cdot s^{-2})$, el producto $a \cdot t$ tiene unidades $m \cdot s^{-1}$, es decir, de velocidad.

c. En el diagrama de distancia d en (metros) contra trabajo W (en $joules \cdot m^{-1}$) el producto $F \cdot d$ tiene como unidades los Newton, unidades de fuerza.

d. En un diagrama cartesiano de longitud l en (metros) contra densidad lineal ρ (en $Kg \cdot m^{-1}$) el producto $\rho \cdot l$ tiene unidades de kilogramos, es decir, de masa.



DEFINICIÓN 1 UNIDADES DE ÁREA

i. La unidad de área, es el área contenida en una superficie rectangular (cuadrado) con base y altura de una unidad de longitud.
ii. El área de una superficie es el número de unidades de área que contiene.
iii. El área de una superficie rectangular de base de longitud a y altura de longitud h es $A = bh$ unidades cuadradas.

Calcular el área de regiones del plano cartesiano limitadas por segmentos de recta es relativamente sencillo, analiza el ***ejemplo 2***.

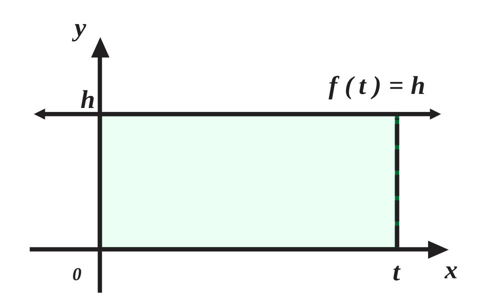
EJEMPLO 2. ALGUNAS FUNCIONES ÁREA

1. Construcción de funciones área.

a. El rectángulo con base en el intervalo $[\,0\,,\,t\,]$ y altura definida por $f\,(\,t\,)=h$ unidades de longitud. La función

$A(\,t\,)=ht$, con $h\geq 0$ y $t\geq 0$,

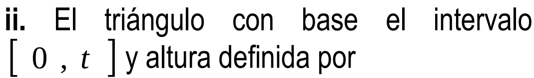
proporciona su área.



ii. El triángulo con base el intervalo $[\,0\,,\,t\,]$ y altura definida por

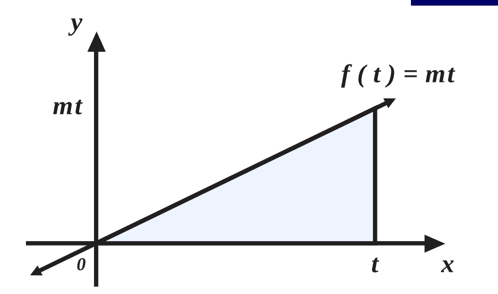
$f\,(\,t\,)=mt$ (pendiente positiva),

entonces, la función



$$A(\,t\,)=\frac{1}{2}mt^2 \text{ con } m,\ t\geq 0$$

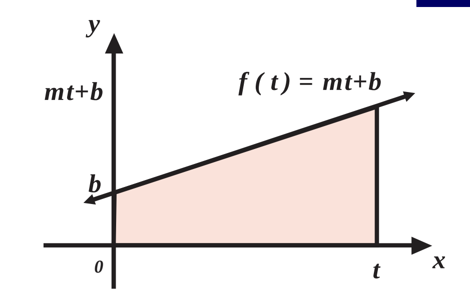
proporciona el área de la región rectangular.



iii. El trapecio de la figura tiene base menor de longitud b, base mayor $f\,(\,t\,)=mt+b$ y altura de longitud $x=t$, entonces, la función

$$A(\,t\,)=\frac{1}{2}(\,b+mt+b\,)t=\frac{1}{2}mt^2+bt$$

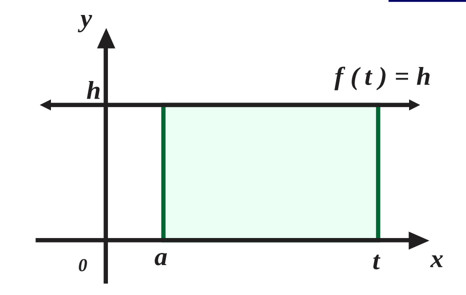
con $t\geq 0$, proporciona su área.



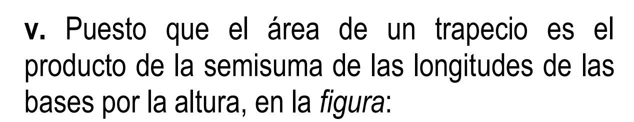
iv. la figura de la derecha tiene base en el intervalo $[\,a\,,\,t\,]$, su altura es h, por tanto,

$$A(\,t\,)=h(\,t-a\,)$$

unidades cuadradas ($h>0$).

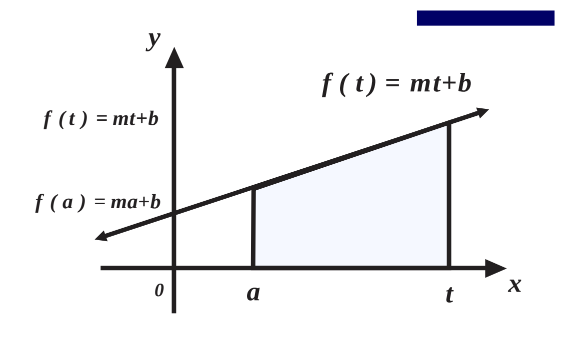


v. Puesto que el área de un trapecio es el producto de la semisuma de las longitudes de las bases por la altura, en la *figura*:



$$A(\,t\,)=\frac{1}{2}[\,(\,ma+b\,)+(\,mt+b\,)\,](\,t-a\,)$$

$$=\frac{1}{2}[\,(\,ma+mt\,)+(\,b+b\,)\,](\,t-a\,)$$



$$= \frac{1}{2}\left[m(t+a)+2b \right](t-a) = \frac{1}{2}\left[m(t+a)(t-a)+2b(t-a) \right]$$

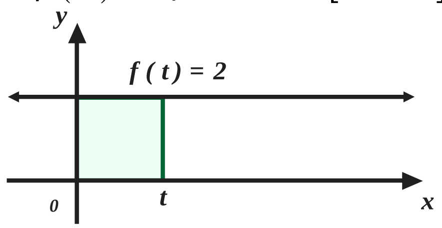
$$= \frac{1}{2}m\left(t^2 - a^2 \right)+b(t-a) \text{ unidades cuadradas } (t > a)$$

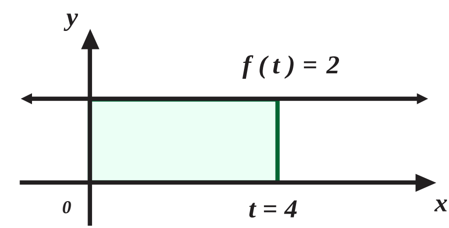
EJEMPLO 3. ÁREAS Y FUNCIONES ÁREA

1. Construcción de funciones área.

a. La región rectangular del plano cartesiano que definen: la curva asociada a $f\left(t \right)=2$ y el intervalo $\left[0 \ , \ x \right]$ se modela con la función $A(x)=2x$

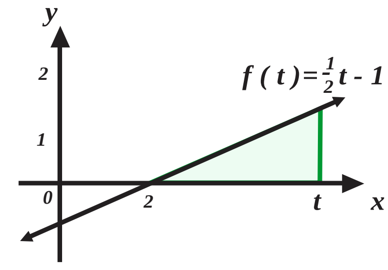
Por tanto, $A(4)=8$ unidades cuadradas, es el área de la región rectangular definida por la curva asociada a $f\left(t \right)=2$ y el intervalo $\left[0 \ , \ 2 \right]$

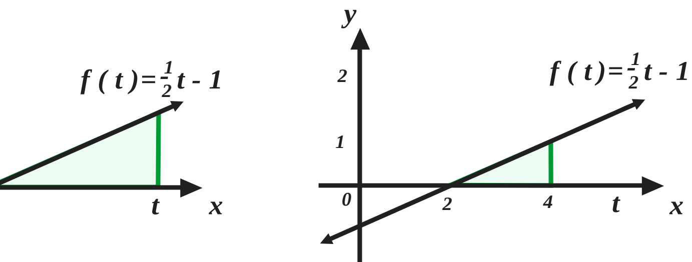




b. La región triangular del plano cartesiano que definen: la curva asociada a $f\left(t \right)=\frac{1}{2}t-1$ y el intervalo $\left[2 \ , \ x \right]$ tiene área $A(x)=\frac{x^2}{4}-x+1$

Por tanto, $A(4)=\frac{4^2}{4}-2+1=3$ unidades cuadradas, es el área de la región triangular definida por la curva asociada a $f\left(t \right)=\frac{1}{2}t-1$ y el intervalo $\left[1 \ , \ 2 \right]$

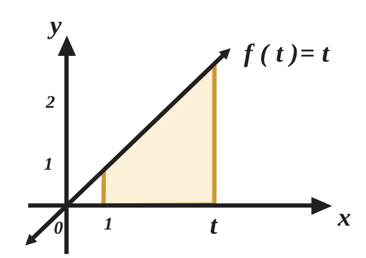


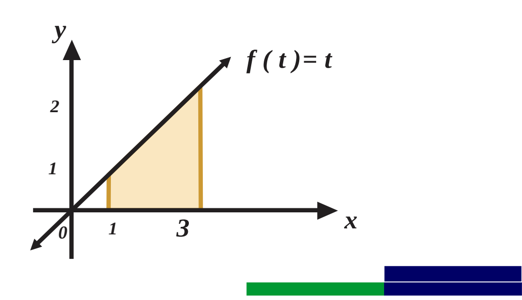


c. La línea recta asociada a $f\left(t \right)=t$ y el intervalo $\left[1 \ , \ x \right]$ definen una región trapezoidal en el plano cartesiano, el área de la región como función de la altura es

$$A(x)=\frac{(1+x)(x-1)}{2}=\frac{x^2-1}{2}$$

Por tanto, $A(3)=\frac{3^2-1}{2}=8$ unidades cuadradas es el área del trapecio que definen $f(t)=t$ y el intervalo $[1,3]$







1. Traza la región y construye "función área".

a. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, el intervalo $[-2,t]$ y la función con regla de correspondencia $f(t)=3$

b. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, el intervalo $[1,t]$ y la función con regla de correspondencia $f(t)=4$

c. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, el intervalo $[-1,t]$ y la función con regla de correspondencia $f(t)=t+1$

d. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, el intervalo $[2,t]$ y la función con regla de correspondencia $f(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

e. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, el intervalo $[-2,t]$ y la función con regla de correspondencia $f(t)=\frac{1}{4}t+\frac{3}{2}$

f. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, el intervalo $[t,2]$ y la función con regla de correspondencia $f(t)=-\frac{1}{2}t+1$

2. Construye la función área y calcula el área solicitada.

a. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, la función con regla de correspondencia $f(t)=1$:

i. El intervalo $[-6,t]$

ii. Sobre $[-6,0]$

b. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, la función con regla de correspondencia $f(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

i. El intervalo $[1,t]$

ii. Sobre $[1,2]$

c. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, la función con regla de correspondencia $f(t)=t$

i. El intervalo $[0,t]$

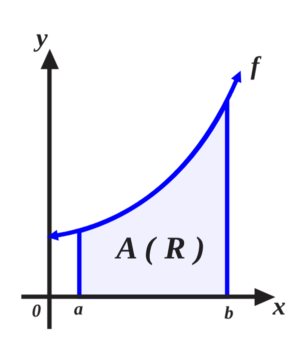
ii. Sobre $[0,3]$

d. Región del plano cartesiano definida por: el eje de las abscisas, la función con regla de correspondencia $f(t)=t+1$

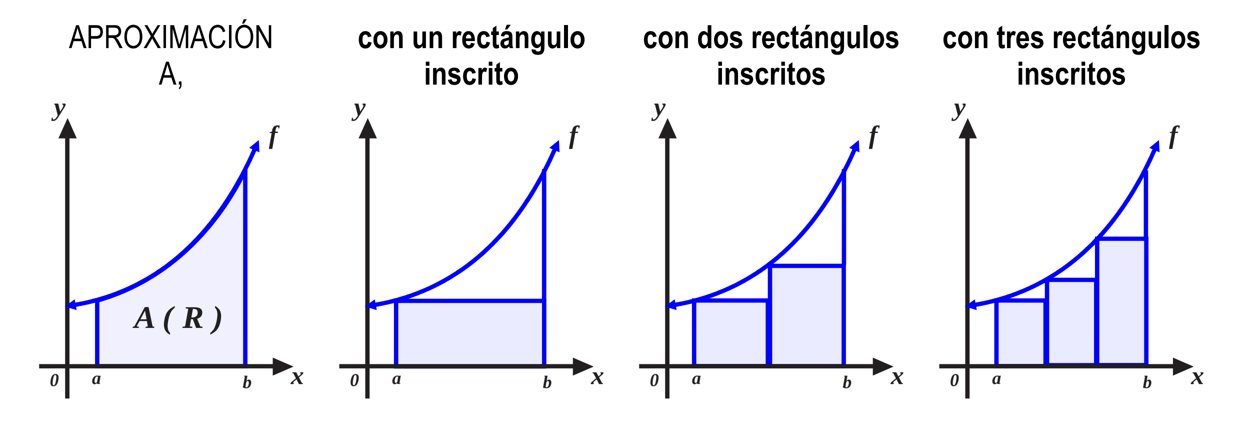
i. El intervalo $[-1,t]$

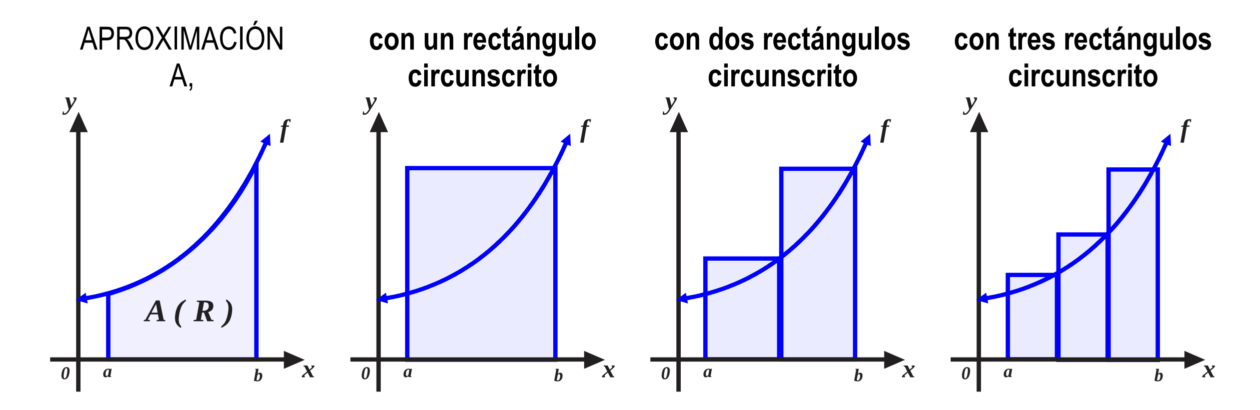
ii. Sobre $[0,2]$

Calcular áreas de regiones del plano cartesiano acotadas por curvas como: arcos de parábolas, sectores de elipses, sectores de hipérbolas etcétera, puede resultar imposible o bastante complejo, es el propósito de la presente sección el conocer los elementos y construir métodos (funciones) que apoyen la solución de lo antes planteado. El cálculo integral generaliza el concepto de área y presenta los métodos para construir funciones área (o en su caso funciones integral) mismos que revisaremos en las siguientes líneas. Por las condiciones del presente curso, sólo nos ocuparemos del cálculo de área de regiones acotadas por secciones (monótonas) de curvas polinomiales de hasta grado tres.



Aproximaciones al número de unidades de área contenidas en la región de la siguiente figura puede obtenerse utilizando rectángulos, en particular inscritos (o circunscritos).





DEFINICIÓN 2 SUMA INFERIOR, SUMA SUPERIOR

Sean:

i. f una función acotada y continua definida sobre $[\ a\ ,\ b\ ]$

ii. $[\ x_0\ ,\ x_1\ ]$, $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$, $\cdots$ $[\ x_{n-1}\ ,\ x_n\ ]$ subintervalos tales que al unirlos se obtiene el intervalo $[\ a\ ,\ b\ ]$

iii. $f\ (\ m_i\ )$ el valor mínimo y $f\ (\ M_i\ )$ el valor máximo de f sobre el intervalo $[\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ]$, entonces,

i. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos es

$$s\ (\ n\ ) = f\ (\ m_1\ )\Delta x_1 + f\ (\ m_2\ )\Delta x_2 + \cdots + f\ (\ m_n\ )\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f\ (\ m_i\ )\Delta x_i$$

y recibe el nombre de suma inferior.

ii. La suma de las áreas de los rectángulos circunscritos es

$$S\ (\ n\ ) = f\ (\ M_1\ )\Delta x_1 + f\ (\ M_2\ )\Delta x_2 + \cdots + f\ (\ M_n\ )\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f\ (\ M_i\ )\Delta x_i$$

y recibe el nombre de suma superior.

Se mejora la aproximación al área de la región $A(\ R\ )$ conforme se incrementa n del número de rectángulos, el lector debe notar que

$$s\ (\ n\ ) \leq A(\ R\ ) \leq S\ (\ n\ )$$

Ahora destaquemos los elementos presentes en la ***definición 2.2***.

a. Una partición del intervalo $[\ a\ ,\ b\ ]$, es:

i. Un conjunto finito de puntos

$\Delta = \{\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n\ \}$, tales que, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$

y que lo dividen en los subintervalos

$$[\ x_0\ ,\ x_1\ ],\ [\ x_1\ ,\ x_2\ ], \cdots, [\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ],\ \cdots,\ [\ x_{n-1}\ ,\ x_n\ ].$$

ii. La longitud o ancho del subintervalo $[\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ]$ $(i - \acute{e}simo$ intervalo) es

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

iii. La norma de la partición Δ se representa por $\| \Delta \|$ se define como el ancho o longitud del mayor de los subintervalos que la componen, es decir,

$$\| \Delta \| = \Delta x = max\left(x_i - x_{i-1} \right)$$

iv. Una partición Δ se denomina regular si todos los subintervalos que genera tienen la misma longitud.

DEFINICIÓN 3 SUMAS DE RIEMANN - CAUCHY

Sean: f una función definida sobre el intervalo $[\ a\ ,\ b\ ]$, $\Delta = \{\ x_0,\ x_1,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n\ \}$ una partición de $[\ a\ ,\ b\ ]$ y Δx_i el ancho del intervalo $[\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ]$. Si $c_i \in [\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ]$, entonces, la suma $\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i \right)\Delta x_i$ se denomina suma de Riemann Cauchy de f para la partición Δ.

Nota que la ***definición 3*** no supone:

a. Continuidad de la función f.

b. Que la función f sea positiva, como consecuencia cada sumando, de una "suma de Riemann-Cauchy no necesariamente representa el área de un rectángulo.

c. Para cada partición de $[\ a\ ,\ b\ ]$ la suma de Riemann Cauchy puede ser diferente.

EJEMPLO 3. ÁREAS Y FUNCIONES ÁREA

1.

a. Sea $\Delta = \{\ -1\ ,\ -0.8\ ,\ 1,\ 1.5\ ,\ 2.1\ ,\ 3\ \}$ partición de $[\ -1\ ,\ 3\ ]$

i. Genera los intervalos

$$[\ -1\ ,\ -0.8\ ]\ ,\ [\ -0.8\ ,\ 1\ ],\ [\ 1\ ,\ 1.5\ ],\ [\ 1.5\ ,\ 2.1\ ],\ [\ 2.1\ ,\ 3\ ]$$

ii. Tiene norma $\| \Delta \| = \Delta x = 1 - (-0.8) = 1.8$

iii. Si $f\left(x \right) = x + 1$, entonces, la suma de Riemann Cauchy para $c_1 = -0.9$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1.2$, $c_4 = 2$ y $c_5 = 2.5$ es:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i \right)\Delta x_i = f\left(-0.9 \right)\left(0.2 \right) + f\left(0 \right)\left(1.8 \right) + f\left(1.2 \right)\left(0.5 \right)$$
$$+ f\left(2 \right)\left(0.6 \right) + f\left(2.5 \right)\left(0.9 \right)$$
$$= \left(0.1 \right)\left(0.2 \right) + \left(1 \right)\left(1.8 \right) + \left(2.2 \right)\left(0.5 \right) + \left(3 \right)\left(0.6 \right) + \left(3.5 \right)\left(0.9 \right) = 7.87$$

b. Sea $\Delta = \{\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1,\ 2\ ,\ 3\ \}$ partición de $[\ -1\ ,\ 3\ ]$

i. Genera los intervalos $[\ -1\ ,\ 0\ ]\ ,\ [\ 0\ ,\ 1\ ],\ [\ 1\ ,\ 2\ ],\ [\ 2\ ,\ 3\ ]$

ii. Tiene norma $\| \Delta \| = \Delta x = 1$ (es regular, todos los intervalos miden lo mismo).

iii. Si $f\left(x \right) = x + 1$, entonces, la suma de Riemann Cauchy para

$c_1 = -0.5$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 1.5$ y $c_4 = 2.5$ es:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(-0.5)(1) + f(0.5)(1) + f(1.5)(1) + f(2.5)(1)$$
$$= (0.5)(1) + (1.5)(1) + (2.5)(1) + (3.5)(1) = 8$$

DEFINICIÓN 4 INTEGRAL DEFINIDA

Sean:

i. f una función definida y acotada sobre el intervalo $[a, b]$,

ii. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = I$

Entonces, f es integrable sobre $[a, b]$ y el número

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$ se denomina integral definida.

En la expresión $I = \int_a^b f(x)dx$, a recibe el nombre de límite inferior de integración y el número b límite superior de integración.

Observaciones:

i. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ es equivalente a $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

El hecho de que la norma de la partición se aproxima a cero es equivalente a que el número de "sumandos" de la suma de Riemann Cauchy se incremente indefinidamente.

ii. En la ***definición 4.***, si f es positiva sobre $[a, b]$, entonces, el número

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

proporciona el número de unidades cuadradas de la región del plano cartesiano limitada por la sección de la curva asociada a f sobre $[a, b]$

En el cálculo (inicial) de integrales se utilizan las ***propiedades 1. y 2.***

PROPIEDAD 1 PROPIEDADES DE LAS SUMAS

Si c es cualquier número, entonces,

i. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ (propiedad de homogeneidad).

ii. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ (propiedad de aditividad).

iii. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (propiedad telescópica).

PROPIEDAD 2 SUMAS DE POTENCIAS DE LOS PRIMEROS n NÚMEROS NATURALES

Si c es un número y n es cualquier un número natural, entonces,

i. Suma n veces el número c $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

ii. Suma de los primeros n números naturales,

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

iii. Suma de los cuadrados de los primeros n números naturales,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

iv. Suma de los cubos de los primeros n números naturales,

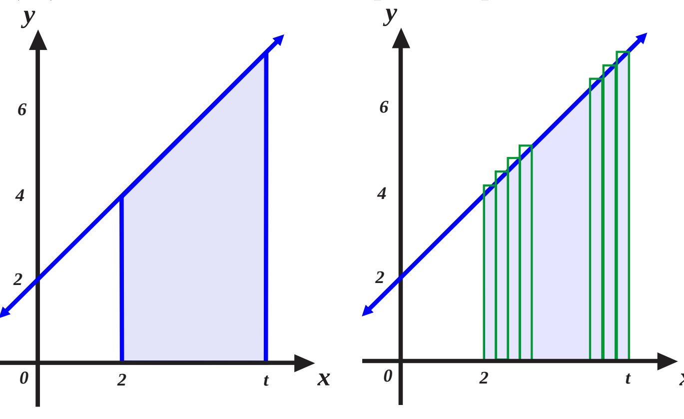
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

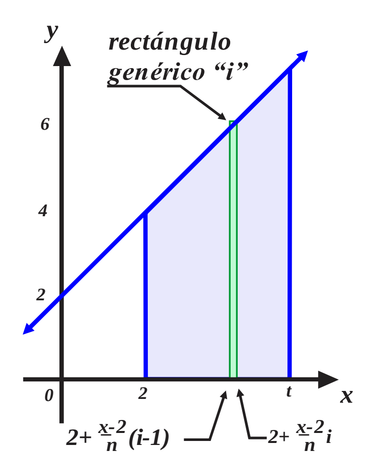
Ya estamos en condiciones de construir funciones área asociadas a regiones relativamente más complejas.

EJEMPLO 4. ÁREAS Y FUNCIONES ÁREA (BIS)

1. Traza la región y construye la función que describe su área.

a. $f(t)=t+2$ sobre el intervalo $[2, x]$





i. La ***figura*** de la izquierda muestra la región.

ii. La ***figura*** del centro muestra algunos de los n rectángulos circunscritos, cada uno de ellos tiene base de longitud $\Delta x=\dfrac{x-2}{n}$

iii. La ***figura*** de la derecha muestra el rectángulo genérico i, las abscisas de los extremos de su base son:

$$m_{i-1}=2+\frac{x-2}{n}(i-1) \text{ y } M_i=2+\frac{x-2}{n}i,$$

con ordenadas,

$$f(m_{i-1}) = 2 + \frac{x-2}{n}(i-1) + 2 \text{ y } f(M_i) = 4 + \frac{x-2}{n}i \;,$$

respectivamente.

iv. Área del rectángulo genérico

$$A(R_i) = \left(\frac{x-2}{n}\right)\left(4 + \frac{x-2}{n}i\right) = \left(\frac{x-2}{n}\right)^2 i + 4\left(\frac{x-2}{n}\right)$$

v. Sumas superiores

$$S(n) = \left(\frac{x-2}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i + 4\left(\frac{x-2}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} 1$$

vi. En términos de la ***propiedad 2.***,

$$S(n) = \left(\frac{x-2}{n}\right)^2 \frac{n^2+n}{2} + 4\left(\frac{x-2}{n}\right)n \;,$$

o bien,

$$S(n) = \frac{1}{2}(x-2)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + 4(x-2)$$

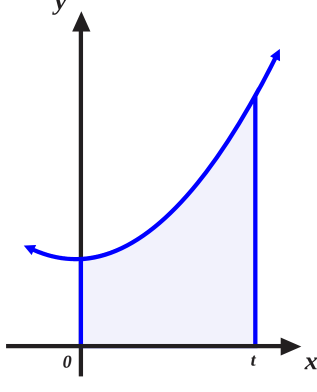
vii. Aplicando la definición de integral,

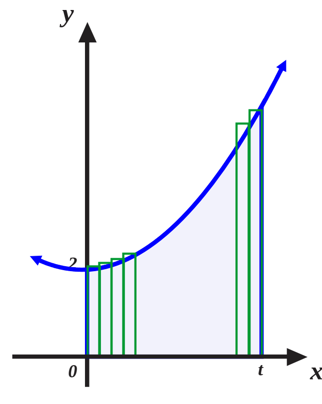
$$\int_2^x f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(x-2)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)+4(x-2)\right] = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 4(x-2)$$

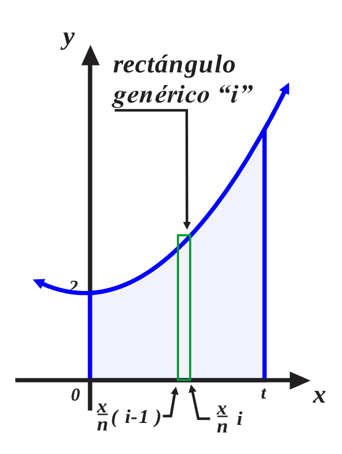
viii. Por tanto, la función área es

$$A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$$

b. $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1$ sobre el intervalo $[\,0\;,\;x\,]$







i. La ***figura*** de la izquierda muestra la región.

ii. La ***figura*** del centro muestra algunos de los n rectángulos **circunscritos**, observa que cada uno de ellos tiene base de longitud

$$\Delta x = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$$

iii. La ***figura*** de la derecha muestra el rectángulo genérico i, las abscisas de los extremos de su base son:

$$m_{i-1} = \frac{x}{n}(i-1) \text{ y } M_i = \frac{x}{n} i,$$

con ordenadas,

$$f(m_i) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2}(i-1)^2 + 1 \text{ y } f(M_i) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2} i^2 + 1$$

respectivamente.

iv. Área del rectángulo genérico

$$A(R_i) = \left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2} i^2 + 1\right) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{n^3} i^2 + \frac{x}{n}$$

v. Sumas superiores

$$S(n) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

vi. En términos de la ***propiedad 2.***,

$$S(n) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) + \frac{x}{n}(n),$$

o bien,

$$S(n) = \frac{1}{6}x^3\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2n^3}\right) + x$$

vii. Aplicando la definición de integral,

$$\int_2^x f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{6}x^3\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2n^3}\right) + x\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{6}x^3\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n}\right) + x\right]$$

viii. Por tanto, la función área es

$$A(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \frac{1}{6}x^3 + x$$

c. $f(t) = -\frac{1}{27}t^3 + 3$ sobre el intervalo $[\,0\,,\,x\,]$, con $x \le \frac{17}{3}$

i. La ***figura*** de la izquierda muestra la región y algunos de los n rectángulos **inscritos**, cada uno ellos tiene base con longitud

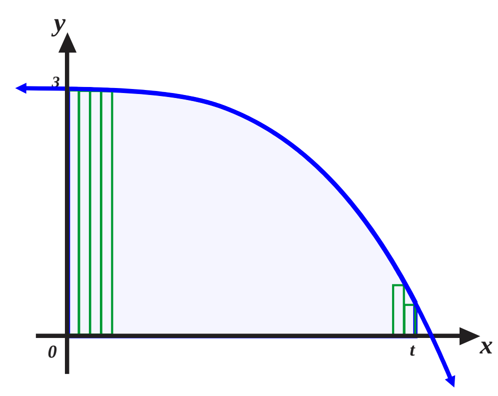
$$\Delta x = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$$

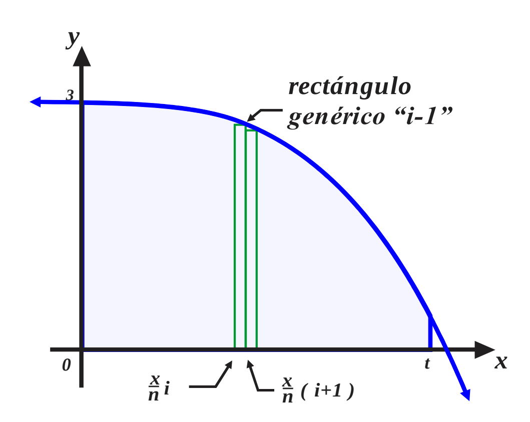
ii. La ***figura*** de la derecha muestra el rectángulo genérico $i-1$, las abscisas de los extremos de su base son:

$$M_i = \frac{x}{n} i \text{ y } m_{i+1} = \frac{x}{n}(i+1)$$

con ordenadas,

$$f(M_i) = -\frac{1}{27}\frac{x^3}{n^3}i^3 + 3 \text{ y } f(m_{i+1}) = -\frac{1}{27}\frac{x^3}{n^3}(i+1)^3 + 1$$





iii. Área del rectángulo genérico

$$A(R_i) = \left(\frac{x}{n}\right)\left(-\frac{1}{27}\frac{x^3}{n^3}i^3 + 3\right) = -\frac{1}{27}\frac{x^4}{n^4}i^4 + \frac{3x}{n}$$

iv. Sumas inferiores

$$s(n) = -\frac{1}{27}\frac{x^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{3x}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

v. En términos de la ***propiedad 2.***,

$$s(n) = -\frac{1}{27}\frac{x^4}{n^4}\left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}\right) + \frac{3x}{n}n,$$

o bien,

$$s(n) = -\frac{1}{108}x^4\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}\right) + 3x$$

vi. Aplicando la definición de integral,

$$\int_2^x f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{108}x^4\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}\right) + 3x\right] = -\frac{1}{108}x^4 + 3x$$

vii. Por tanto, la función área es

$$A(x) = -\frac{1}{108}x^4 + 3x$$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 2

1.
a. Sea $\Delta = \{ -1 , 0 , 1 , 3 \}$ partición de $[-1 , 3]$
i. Construye los intervalos que genera.
ii. Calcula la norma.
iii. Si $f(x) = -2x$ y $c_1 = -0.5$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 2$, calcula la suma de Riemann - Cauchy.
b. Sea $\Delta = \{ 1 , 3 , 5 \}$ partición de $[0 , 6]$
i. Construye los intervalos que genera.
ii. Calcula la norma.
iii. Si $f(x) = -x^2 + 12$ y $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $c_4 = 6$ calcula la suma de Riemann - Cauchy.

2. En cada caso calcula:
i. El área del rectángulo genérico.
ii. Las sumas de Riemann (superiores o inferiores según convenga).
iii. La función área.
a. $f(t) = 3$ sobre el intervalo $[0 , x]$
b. $f(t) = 2t + 2$ sobre el intervalo $[1 , x]$
c. $f(t) = t^2 + 4$ sobre el intervalo $[3 , x]$
d. $f(t) = -t^3 + 4$ sobre el intervalo $[0 , x]$

2.2 LA FUNCIÓN ÁREA Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

APRENDIZAJES

El alumno:

6. Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma [0 , x] y calcula con ella el área en el intervalo [a , b].
7. Identifica la función área como una antiderivada o primitiva.
8. Infiere a la integral definida como el límite de sumas infinitas.
9. Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del cálculo.
10. Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.
11. Utiliza las propiedades de la integral definida.
12. Identifica los elementos que sustentan al teorema fundamental del cálculo.
13. Aplica el teorema fundamental del cálculo.
14. Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una curva.

En la sección anterior definimos área en el plano cartesiano, sin embargo, tal definición de área es bastante rígida en el sentido las hipótesis que contiene, así como poco práctica; por tanto, corresponde mejorarla.

DEFINICIÓN 1 INTEGRAL DEFINIDA (BIS)

Sean:

i. f una función definida y acotada sobre el intervalo $[\, a\,,\, b\,]$

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = I$, entonces, f es integrable sobre $[\, a\,,\, b\,]$ y el número

$$I = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$ se denomina integral definida.

En $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)dx$ se llama integrando, a límite inferior y b límite superior.

Revisemos las condiciones o hipótesis que debe cumplir una función para ser integrable (según Riemann).

1. Las funciones continuas y acotadas sobre un intervalo de la forma $[\, a\,,\, b\,]$ son integrables,

PROPOSICIÓN 1 CONTINUIDAD SOBRE $[\, a\,,\, b\,]$ IMPLICA INTEGRABILIDAD

Si f es una función continua sobre el intervalo $[\, a\,,\, b\,]$, entonces, f es integrable en $[\, a\,,\, b\,]$

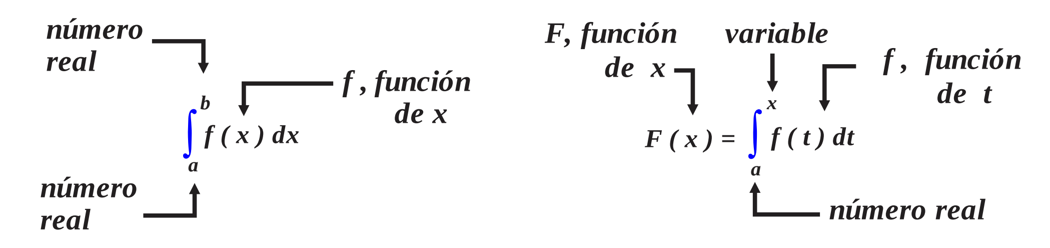
Funciones, como las polinomiales, las exponenciales, las logarítmicas y las senoidales (puesto que son continuas sobre los números reales) son integrables, sin embargo, la integrabilidad de otros tipos de funciones dependerá del intervalo del dominio considerado.

2. La ***definición 1.***, es una generalización del concepto de área de una región en el plano cartesiano y hace posible escribir esta última en términos de la integral definida, sin embargo, cuando f es negativa o presenta ambos signos sobre un intervalo, el número

$$I = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

simplemente se llama "integral" (y no necesariamente representa el área de una región). Por otra parte, si en la ***definición 1.***, el límite superior es variable (o el inferior) tenemos

la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$



DEFINICIÓN 2 FUNCIÓN INTEGRAL

Sea f una función con dominio $[a, x]$, entonces,
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ se denomina “función integral”.

En la ***definición 5.***, el límite superior es variable y la función $F(x)$ recibe los nombres de: primitiva, antiderivada o simplemente integral de $f(t)$. Por otra parte, la integral se identifica como un “operador” (u operación) y entre sus propiedades destacan las señaladas a continuación.

PROPIEDAD 1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INTEGRAL

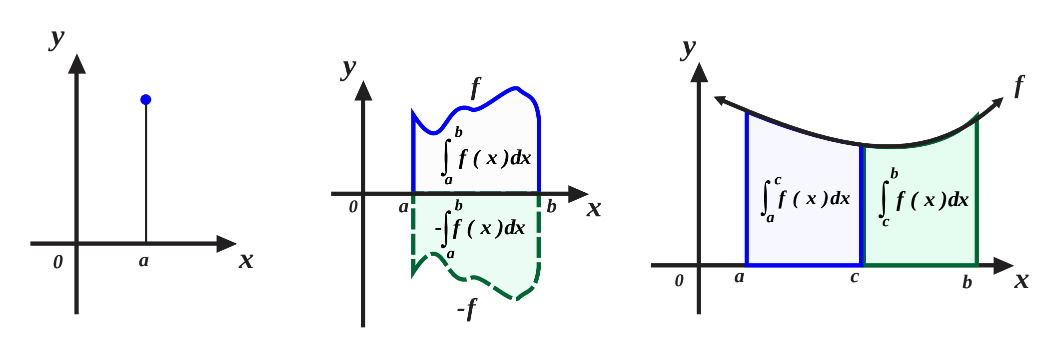
Sea f dominio en $[a, x]$, b y $c \in [a, x]$ y $c < b$, entonces,

i. $F(b) = \int_b^b f(x)\,dx = 0$

ii. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

iii. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Las ***figuras*** ilustran la ***propiedad 1.***



Las propiedades de aditividad y homogeneidad son de gran utilidad en el cálculo de integrales.

PROPIEDAD 2 LINEALIDAD DE LA FUNCIÓN INTEGRAL

Sean f, g funciones integrables sobre $[a, b]$ y k un número real, entonces, $k \cdot f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ y $\int_a^b [k\,f(x) + g(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

EJEMPLO 1. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

1

a. . Calcula las integrales.

i. Si $f(x) = x + 1$, entonces, $\int_3^3 (x+1)\,dx = 0$

ii. Si $f(x)=\sqrt{x^2+3}$, entonces, $\int_{-4}^{-4}\sqrt{x^2+3}\,dx=0$

iii. Si $f(x)=3^x+log_4 x$, entonces, $\int_{20}^{20}\left(3^x+log_4 x\right)dx=0$

b. Rescribe la integral aplicando la ***propiedad 1.ii***.

i. $\int_{2}^{6}\left(4x^2-5\right)dx=-\int_{6}^{2}\left(4x^2-5\right)dx$

ii. $\int_{-8}^{12}\left(4e^{2x}+sen\,x\right)dx=-\int_{12}^{-8}\left(4e^{2x}+sen\,x\right)dx$

iii. $\int_{4}^{10}\left(1+\frac{4}{2x}\right)dx=-\int_{10}^{4}\left(1+\frac{4}{2x}\right)dx$

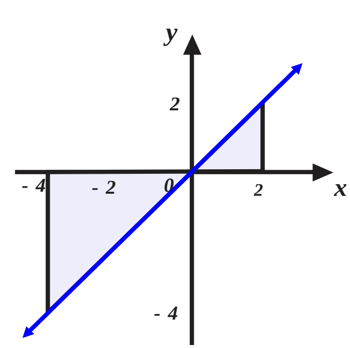
c.

i. En la ***figura.***,

$$\int_{-4}^{0}x\,dx=-8 \text{ y } \int_{0}^{2}x\,dx=2,$$

entonces,

$$\int_{-4}^{2}x\,dx=-6$$

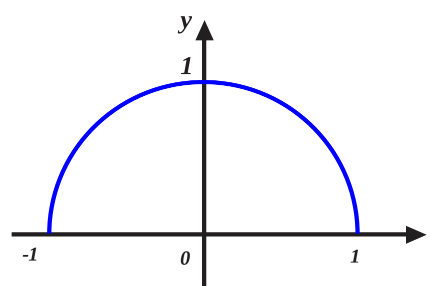


ii. En la ***figura.***,

$$\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4} \text{ y } \int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4},$$

entonces,

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$



d.

i. $\int_{-2}^{5}\left(6x^2-8cos\,x\right)dx=6\int_{-2}^{5}x^2\,dx+8\int_{-2}^{5}cos\,x\,dx$

ii. $\int_{3}^{5}\left(2e^{3x}-7x^2-8\ln x-1\right)dx=2\int_{3}^{5}e^{3x}\,dx-7\int_{3}^{5}x^2\,dx-8\int_{3}^{5}\ln x\,dx-\int_{3}^{5}1dx$

iii. $\int_{-1}^{7}\left(12-2\sqrt[3]{x}+3x^5\right)dx=12\int_{-1}^{7}1dx-2\int_{-1}^{7}\sqrt[3]{x}\,dx+3\int_{-1}^{7}x^5dx$



1.

a. Calcula la integral.

i. $\int_4^4 3(x+1)\,dx$ **ii.** $\int_{-2}^{-2} \sqrt{x^2+3sen\,x}\,dx$ **iii.** $\int_5^5 \left(5^x+3log_6 x+4\right)dx$

b. Rescribe la integral de manera que esté precedida por un signo menos.

i. $\int_8^7 \left(3x^3+5x-1\right)dx$ **ii.** $\int_{-4}^{4} \left(\frac{1}{2}x^8-tg\,x\right)dx$ **iii.** $\int_4^{10} \left(9-\frac{3-x}{x^2}\right)dx$

c. Rescribe la integral de manera que esté precedida por un signo positivo.

i. $\int_8^7 \left(3x^3+5x-1\right)dx$ **ii.** $-\int_{-4}^{6} \left(\frac{1}{2}x^3-2x+1x\right)dx$ **iii.** $-\int_3^7 \left(8+\frac{3-x}{x^4}\right)dx$

d. Calcula el valor de la integral.

i. Si $\int_0^2 \left(4x^3+2x-1\right)dx=18$ y $\int_2^4 \left(4x^3+2x-1\right)dx=250$, calcula $\int_0^4 \left(4x^3+2x-1\right)dx$

ii. Si $\int_{-1}^{0} \left(e^x+4x\right)dx=-\frac{1}{e}-1$ y $\int_{-1}^{1} \left(e^x+4x\right)dx=e-\frac{1}{e}$, calcula $\int_0^1 \left(e^x+4x\right)dx$

iii. Si $\int_0^2 (x-2)\,dx=-2$ y $\int_{-2}^{2} (x-2)\,dx=-8$, calcula $\int_{-2}^{0} (x-2)\,dx$

La respuesta a la pregunta

¿Cuál es la relación entre la función integral y la función derivada? se conoce como ***primera parte del teorema fundamental del cálculo***, proposición que facilita la forma de evaluar integrales (o construcción de funciones área) utilizando la antiderivada. Su justificación requiere del uso de otras propiedades de la integral que por sus características no son tratadas en esta obra.

PROPIEDAD 3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea la función f integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces,

i. $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ definida sobre $[a, b]$ es derivable en (a, b) y $F'(x)=f(x)$

ii. $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, donde F es una antiderivada de f

EJEMPLO 2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INTEGRAL

1. Deriva la función.

a. Si $F(x)=\int_2^x (8t^4-5t)dt$, entonces, $F'(x)=8x^4-5x$

b. $F(x)=\int_2^x (\cos t+\operatorname{sen} t\, t)dt$, entonces, $F'(x)=\cos x+\operatorname{sen} t\, x$

c. $F(x)=\int_5^x \sqrt{5-6t+t^2}\,dt$, entonces, $F'(x)=\sqrt{5-6x+x^2}$

d. $F(x)=\int_{-3}^x -2e^t+t^2+3dt$, entonces, $F'(x)=-2e^x+x^2+3$

EJEMPLO 3. OBTÉN LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO

1. Obtén la función del integrando.

a. Derivamos la función $F(x)=\frac{x^2}{2}-4$, obtenemos $f(x)=x$, por tanto, $\int_a^x t\,dt=\frac{x^2}{2}+C$

b. Si derivamos la función $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$, obtenemos $f(x)=x^3+x^2+x+1$, por tanto,

$$\int_a^x t^3+t^2+t+1\,dt=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

c. Si derivamos la función $F(x)=x^3+2x^2+C$ obtenemos $f(x)=3x^2+4x$, por tanto,

$$\int_a^x (3t^2+4t)dt=x^3+2x^2+C$$

d. Si derivamos la función $F(x)=\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x+C$ obtenemos $f(x)=\cos x+\sec^2 x$, por tanto, $\int_a^x (\cos t+\sec^2 t)dt=\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x+C$

e. Si derivamos la función $F(x)=e^x+\ln x+C$ obtenemos $f(x)=e^x+\frac{1}{x}$, por tanto,

$$\int_a^x \left(e^t+\frac{1}{t}\right)dt=e^x+\ln x+C$$

EJEMPLO 4. EVALUACIÓN DE INTEGRALES

1. En cada caso se proporciona la antiderivada, evalúa la integral.

a. Si $\int_1^2 2\,dx$ y $F(x) = 2x$, entonces, $\int_1^2 2\,dx = [\,2x\,]_1^2 = 2(2) - 2(1) = 2$

b. Si $\int_0^2 (4x+6)\,dx$ y $F(x) = 2x^2 + 6x$, entonces,

$$\int_0^3 (4x+6)\,dx = \left[\,2x^2 + 6x\,\right]_0^3 = \left(2(3)^2 + 6(3)\right) - \left(2(0)^2 + 6(0)\right) = 18$$

c. Si $\int_{-1}^1 \frac{x^2-4}{x-2}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\,dx = \int_{-1}^1 (x+2)\,dx$ y $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$, entonces,

$$\int_{-1}^2 \frac{x^2-4}{x-2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{(1)^2}{2} + 2(1)\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right) = 4$$

$\int_1^8 \frac{1}{x}\,dx$ y $F(x) = \ln x$, entonces, $\int_1^8 \frac{1}{x}\,dx = [\,\ln x\,]_1^8 = \ln(8) - \ln(1) = \ln(8)$

e. Si $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - sen\,x)\,dx$ y $F(x) = 4x + \cos x$, entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - sen\,x)\,dx = [4x + \cos x\,]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(4\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(4(0) + \cos 0\right) = 2\pi - 1$$



SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 2

1. Obtén la función derivada.

a. $F(x) = \int_6^x \left(3t^3 - 4t + 3\right)dt$

b. $F(x) = \int_2^x \left(tg\,t + \frac{1}{4} sen\,t\,t + 2\right)dt$

c. $F(x) = \int_5^x \sqrt{5 - \frac{6}{t} - t^2}\,dt$

d. $F(x) = \int_{-3}^x -2e^{4t} + t^2 + 3ctg\,t\,dt$

2. Rescribe como integral.

a. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4$

b. $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$

c. $F(x) = e^x + \ln x$

d. $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e. $F(x) = 4e^x + 2\ln x$

f. $F(x) = x - \cos x$

3. Evalúa la integral.

a. $\int_0^4 \left(3x^2 - 5x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x \right]_0^4$

b. $\int_{-3}^{3} \left(x^3 + x - 1\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-3}^{3}$

c. $\int_1^4 \left(x - \ln x\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\ln x + x \right]_1^4$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\,\mathrm{sen}\,x\right) dx = \left[-x\cos x + \mathrm{sen}\,x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

Para interpretar $\int_a^b f(x)dx$ como área de una región en el plano cartesiano requiere que los ejes coordenados tengan asociadas unidades de longitud y:

CASO 1.

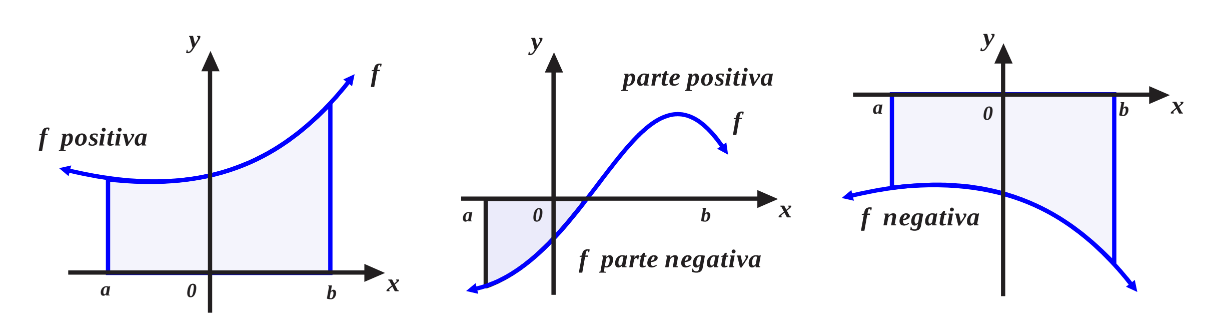
Si f es positiva sobre (todo) el intervalo $[a, b]$, el número $\int_a^b f(x)dx$ representa el área de la región correspondiente.

CASO 2.

Si f es cambia de signo sobre $[a, b]$, entonces, $[a, b]$ se divide en subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de forma que sea completamente positiva o negativa sobre ellos, se calculan los números $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ y se suman sus valores absolutos.

CASO 3.

Si f es negativa sobre todo el intervalo $[a, b]$, el valor absoluto de $\int_a^b f(x)dx$ representa el área de la región correspondiente.



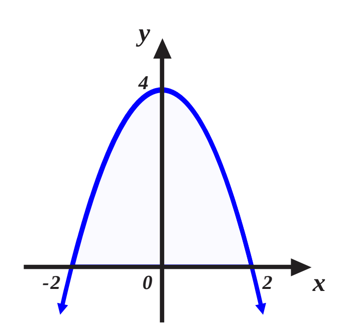
EJEMPLO 5. ÁREA DE UNA REGIÓN DEL PLANO CARTESIANO

1. Calcula el área de la región del plano cartesiano R.

a. La región del plano cartesiano R definida por $f(x) = 4 - x^2$ y el intervalo $[-2, 2]$

La *figura* de la derecha muestra la región, su área está limitada por la sección de una parábola que es positiva sobre el intervalo $[\ -2\ ,\ 2\ ]$, por tanto,

$$A(\ R\ )=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left[\ 4x-\frac{x^3}{3}\ \right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}\ u^2$$

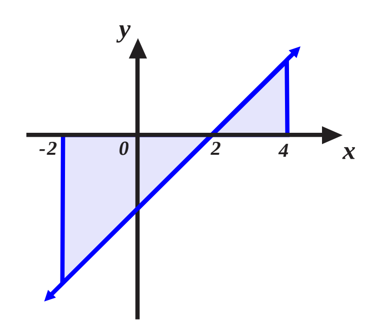


b. La región del plano cartesiano R definida por $f\ (\ x\ )=x-2$ y el intervalo $[\ -2\ ,\ 4\ ]$

La *figura* de la derecha muestra la región; el cálculo de su área se realiza dividiendo el segmento rectilíneo que forma parte de $f\ (\ x\ )=x-2$ en dos secciones definidas sobre los intervalos $[\ -2\ ,\ 2\ ]$ y $[\ 2\ ,\ 4\ ]$

$$A(\ R_1\ )=\left|\ \int_{-2}^{2}\ (\ x-2\ )dx=\left[\ x^2-2x\ \right]_{-2}^{2}\ \right|=8$$

$$A(\ R_2\ )=\int_{2}^{4}(\ x-2\ )dx=\left[\ x^2-2x\ \right]_{2}^{4}=2$$



Por tanto,

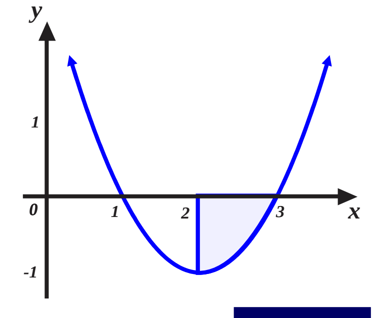
$$A(\ R\ )=A(\ R_1\ )+A(\ R_2\ )=8+2=10\ u^2$$

c. La región del plano cartesiano R definida por $f\ (\ x\ )=x^2-4x+3$ y el intervalo $[\ 2\ ,\ 3\ ]$

La *figura* de la derecha muestra la región; el cálculo de su área se realiza integrando $f\ (\ x\ )=x^2-4x+3$ en $[\ 2\ ,\ 3\ ]$, entonces,

$$A(\ R_1\ )=\left|\ \int_{2}^{3}x^2-4x+3dx\ \right|$$

$$=\left|\ \left[\ x^2-4x+3\ \right]_{2}^{3}\ \right|=\frac{1}{3}\ u^2$$

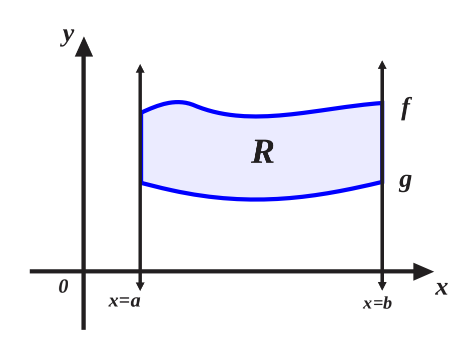


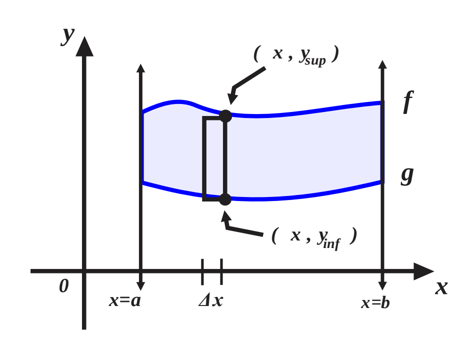
Si f y g son integrables y $f\geq g$ sobre $[\ a\ ,\ b\ ]$, entonces, para calcular el área de la región que limitan con las líneas rectas de ecuaciones $x=a$ y $x=b$ se considera el rectángulo generatriz R_i, mismo que tiene base Δx y altura

$$h=y_{\text{sup}}-y_{\text{inf}}\text{ , su área es área }[\ f\ (\ x\ )-g\ (\ x\ )\ ]\Delta x$$

Por tanto, La "suma" de las áreas de todos los rectángulos entre $x=a$ y $x=b$ es

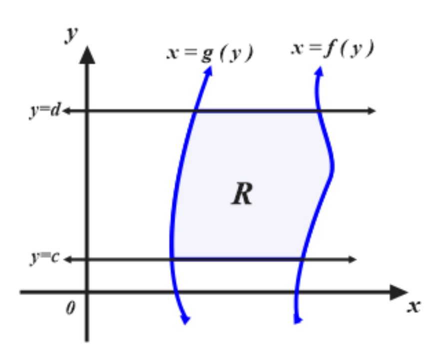
$$A\ (\ R\ )=\int_{a}^{b}[\ f\ (\ x\ )-g\ (\ x\ )\ ]dx\ \ u^2$$

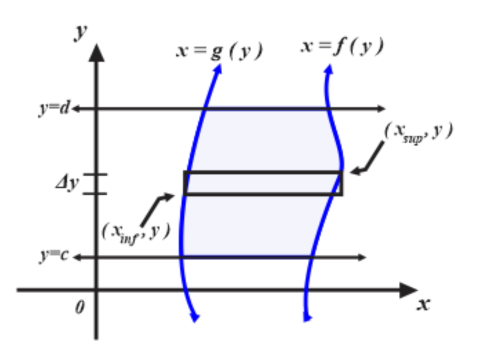




Si no ocurre que $f \geq g$,entonces, la región debe dividirse en subregiones de manera que se cumpla la condición señalada. Un método similar se aplica cuando la región del plano cartesiano está acotada por dos curvas de manera que una de ellas se encuentre a la derecha de la otra, obteniéndose

$$A(R) = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy \; u^2$$





EJEMPLO 6. ÁREA LIMITADA POR DOS CURVAS

1. Calcula el área de la región definida por:

a. Las curvas de $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 1$, $x = 0$ y $x = 1$ sobre el intervalo $[\,0\,,\,1\,]$

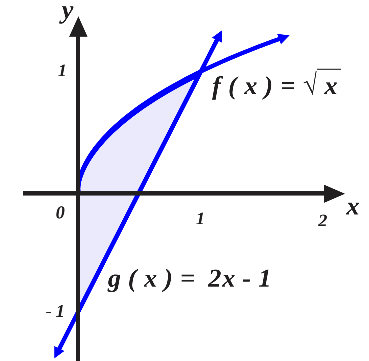
La región se muestra en la figura de la derecha. se cumple

$$f \geq g \text{ sobre } [\,0\,,\,1\,],$$

por tanto,

$$A(R) = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - (2x - 1)\right]dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - 2x + 1\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 + 1 = \frac{2}{3} \; u^2$$

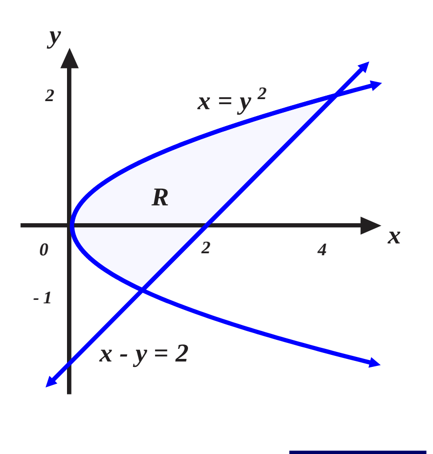


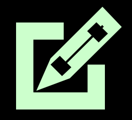
b. Las curvas asociadas a $y^2 = x$ y $x - y = 2$

Se intersecan si $y^2 = y+2$ o $y^2 - y - 2 = 0$, luego, $y=-1$ e $y=2$. La curva asociada a $x-y=2$ se encuentra a la derecha de la curva asociada a $y^2 = x$. Las funciones en términos de la variable y son, $f(y) = y+2$ y $g(y) = y^2$, entonces,

$$A(R) = \int_{-1}^{2} \left[y+2-\left(y^2\right) \right] dx$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \text{ unidades de área}$$





SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 3

1.

a. El área limitada de la región definida por $f(x) = 10 - .x$ el eje de las abscisas y las líneas rectas de ecuaciones $x=2$ y $x=8$

b. El área limitada de la región definida por $f(x) = x^2 - 4.x + 3$ el eje de las abscisas y las líneas rectas de ecuaciones $x=0$ y $x=2$

c. El área de la región del plano cartesiano definida por la curva asociada a $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ sobre el intervalo $[-1, 2]$. **d.** El área de la región del plano cartesiano definida por la curva asociada a $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[-3, 3]$

e. El área de la región del plano cartesiano definida por las curvas asociadas a $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$

f. El área de la región del plano cartesiano definida por las curvas asociadas a $f(x) = 2 - 2x^2$ y $g(x) = -1$

g. El área de la región del plano cartesiano definida por las curvas asociadas a $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = x^2 + 2$

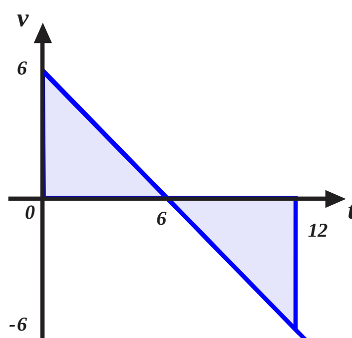
h. El área de la región del plano cartesiano definida por las curvas asociadas a $f(y) = 3 - y^2$ y $g(y) = y + 1$

Entre otras muchas interpretaciones, el área de una región del plano cartesiano puede ser la de una distancia recorrida o el desplazamiento de un objeto.

EJEMPLO 5. OTRAS APLICACIONES

1. Desplazamiento de un objeto.

a. Un objeto se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = 6 - t$ metros por segundo, t representa el tiempo en segundos. Si la velocidad del objeto es positiva significa que se mueve hacia la derecha, en caso contrario se mueve a la izquierda.



i. Se desplaza en $[0, 6]$ segundos

$$\int_0^6 (6-t)dt = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_0^6 = 36 - 18 = 18 \text{ metros.}$$

ii. Recorre en $[0, 6]$ segundos

$$\int_0^6 (6-t)dt = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_0^6 = 36 - 18 = 18 \text{ metros.}$$

iii. Se desplaza en $[0, 12]$ segundos $\int_0^{12} (6-t)dt = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{12} = 0$ metros.

iv. Recorre en $[0, 12]$ segundos, $\int_0^{12} (6-t)dt - \int_6^{12} (6-t)dt = 36$ metros.

v. Se desplaza (el cambio en su posición) en $[0, 10]$ segundos

$$\int_0^{10} (6-t)dt = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{10} = 60 - 50 = 10 \text{ metros.}$$

vi. Ha recorrido en $[0, 10]$ segundos

$$\int_0^6 (6-t)dt - \int_6^{10} (6-t)dt = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_0^6 - \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_6^{10} = 36 + 8 = 44 \text{ metros.}$$

vii. Se desplaza en $[2, 8]$ segundos $\int_2^8 (6-t)dt = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_2^8 = 6$ metros.

viii. Recorre en $[2, 8]$ segundos

$$\int_2^6 (6-t)dt - \int_6^8 (6-t)dt = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_2^6 - \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_6^8 = 8 + 2 = 10 \text{ metros.}$$

2. Crecimiento.

a. La función $P(t) = 43.155e^{0.2877t}$ proporciona el número de "bacterias / horas", por tanto, las unidades de $t \cdot P(t)$ son "bacterias", es decir, para obtener el número de bacterias es necesario integrarla sobre el intervalo de interés.

i. El total de baterías estimadas pasando las 3 horas es

$$\int_0^3 \left(43.155e^{0.2877t}\right)dt = \left[150e^{0.2877t}\right]_0^3 \approx 206$$

ii. El número de bacterias entre las 2 y las 5 horas es

$$\int_2^5 \left(43.155e^{0.2877t}\right)dt = \left[150e^{0.2877t}\right]_2^5 \approx 366$$

b. Si $M(t) = 2.564e^{0.02564t}$, describe la rapidez de crecimiento (en gramos) de la masa de un tumor por año, entonces, sus unidades son "gramos / año". El producto $t \cdot M(t)$ tiene unidades de masa (gramos). Para determinar la cantidad de masa a los t años se requiere integrar.

i. La cantidad de masa (del tumor) a los dos años es

$$\int_0^2 \left(2.564e^{0.02564t}\right)dt = \left[100e^{0.02564t}\right]_0^2 \approx 5.262 \text{ gramos.}$$

ii. La cantidad de masa del tumor entre los dos y los cuatro años es

$$\int_2^4 \left(2.564e^{0.02564t}\right)dt = \left[100e^{-0.02564t}\right]_2^4 \approx 5.539 \text{ gramos.}$$

c. La función $X(t) = 693.36e^{0.366t}$ modela la rapidez de crecimiento del número insectos como función del tiempo (t en horas).

i. El número de insectos a los 90 minutos es $\int_0^{1.5} \left(693.36e^{0.366t}\right)dt = \left[1894.5e^{0.366t}\right]_0^{1.5} \approx 1386$

ii. El número de insectos entre la primera y la tercera hora es

$$\int_1^3 \left(693.36e^{0.366t}\right)dt = \left[1894.5e^{0.366t}\right]_1^3 \approx 2948$$



SECCIÓN 2.2 EJERCICIOS 4

1.

a. Un objeto se mueve en línea recta (de izquierda a derecha) con la velocidad $v(t) = 4 - t^2$ metros por segundo, si t representa el tiempo, calcula:

i. Su desplazamiento y la distancia que recorrió 3 segundos después.

ii. Su desplazamiento y la distancia a que recorrió a los 4 segundos.

iii. Su desplazamiento y la distancia a que recorrió a los 4 y los 6 segundos.

iii. Su aceleración como función del tiempo.

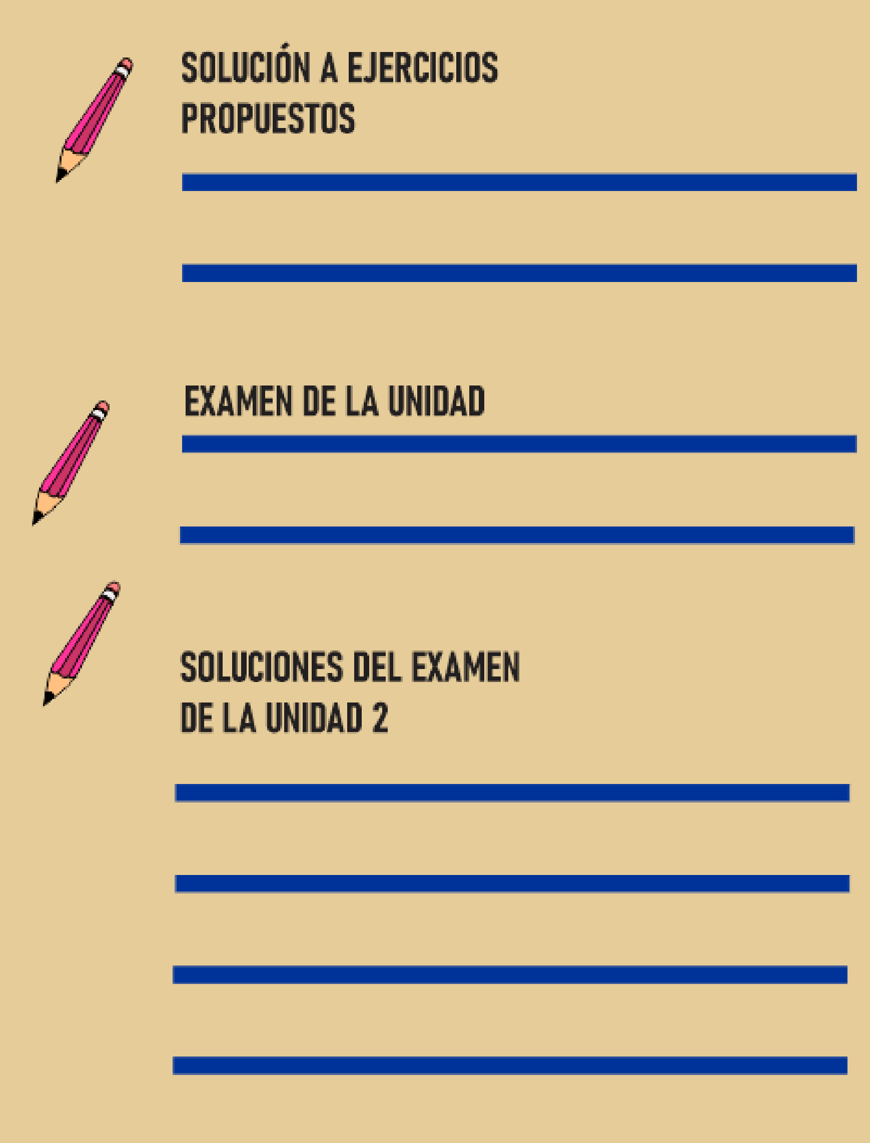
b. La función $p(t) = 916e^{0.229t}$, describe la rapidez de crecimiento del número de batracios en cierto lago en el mes t.
i. Calcula la cantidad de batracios a los 6 meses.
ii. Calcula la cantidad de batracios entre los 6 meses y los doce meses.

c. El modelo $p(t) = 2250e^{0.15t}$, describe la rapidez de crecimiento de una inversión a los t años.
i. Obtén el valor de la inversión a los 5 años.
ii. Calcula el valor de la inversión entre los 3 y los 6 años.

d. La función $p(t) = 10000e^{0.01t}$ describe la rapidez de cambio del valor de un solar con el transcurso del tiempo, t representa el número de años transcurridos.
i. Obtén el valor del solar a los 10 años.
ii. Determine el valor del solar entre los 4 y los 5 años.

2.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

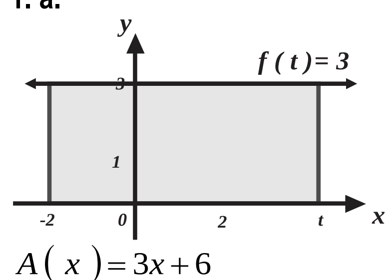






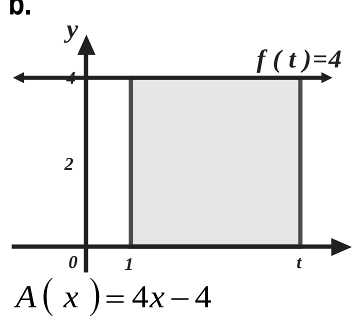
SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a.



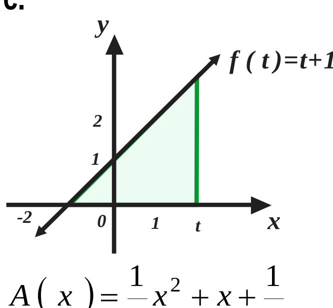
$A(x) = 3x + 6$

b.



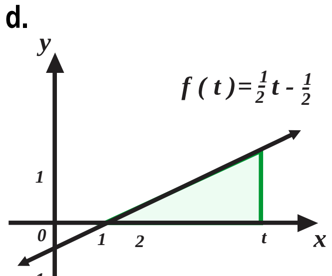
$A(x) = 4x - 4$

c.



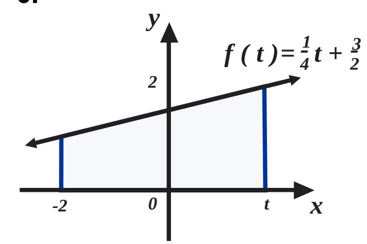
$A(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

d.



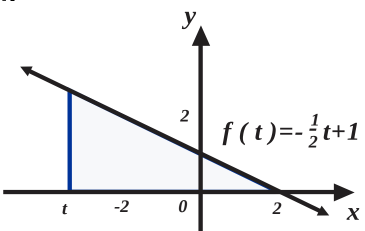
$A(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

e.



$A(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

f.

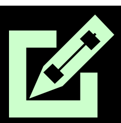


$A(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

2. a. i. $A(x) = x + 6$ **ii.** $A(0) = 6$ unidades cuadradas.

b. i. $A(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ **ii.** $A(2) = \frac{1}{4}$ unidades cuadradas.

c. i. $A(x) = \frac{1}{2}x^2$ **ii.** $A(3) = \frac{9}{2}$ **d. i.** $A(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ **ii** $A(2) = 4$



SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1. a. i. $[-1, 0], [0, 1], [1, 3]$ **ii.** $\|\Delta\| = \Delta x = 2$ **iii.** -8

b. i. $[0, 2], [2, 3], [3, 5], [5, 7]$ **ii.** $\|\Delta\| = \Delta x = 2$ **iii.** -31

2. a. i. $A(R_i) = 3\left(\frac{x}{n}\right)$ **ii.** $S(n) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$ **iii.** $A(x) = 3x$

b. i. $A(R_i) = \left[\frac{2(x-1)}{n}i + 4\right]\frac{(x-1)}{n}$ **ii.** $S(n) = \frac{2(x-1)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4(x-1)}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$

iii. $A(x) = x^2 + 2x - 3$

c. i. $A(R_i) = \left[\frac{(x-3)^2}{n^2} i^2 + 4 \right] \frac{(x-3)}{n}$ **ii.** $S(n) = \frac{(x-3)^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{4(x-3)}{n} \sum_{i=1}^{n} 1$

iii. $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x - \frac{32}{3}$

d. i. $A(R_i) = \left(\frac{x}{n} \right) \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{x}{n} \right)^3 + 4 \right)$ **ii.** $s(n) = -\frac{1}{3} \frac{x^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{4x}{n} \sum_{i=1}^{n} 1$

iii. $A(x) = -\frac{x^4}{4} + 4x - 4$



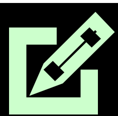
SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. **i.** 0 **ii.** 0 **iii.** 0

b. **i.** $-\int_7^8 \left(3x^3 + 5x - 1 \right) dx$ **ii.** $-\int_4^{-4} \left(\frac{1}{2}x^8 - tg\, x \right) dx$ **iii.** $-\int_{10}^{4} \left(9 - \frac{3-x}{x^2} \right) dx$

c. i. $-\int_7^8 \left(3x^3 + 5x - 1 \right) dx$ **ii.** $\int_6^{-4} \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x + 1x \right) dx$ **iii.** $\int_7^3 \left(8 + \frac{3-x}{x^4} \right) dx$

d. i. $\int_0^4 \left(4x^3 + 2x - 1 \right) dx = 269$ **ii.** $\int_0^1 \left(e^x + 4x \right) dx = e + 1$ **iii.** $\int_{-2}^{0} (x - 2) dx = -6$



SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1. a. $F'(x) = 3x^3 - 4x + 3$ **b.** $F'(x) = tg\, x + \frac{1}{4} sent\, x + 2$ **c.** $F'(x) = \sqrt{5 - \frac{6}{x} - t^2}$

d. $F'(x) = -2e^{4x} + x^2 + 3ctg\, x$

2. a. $\int_a^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3} + C$ **b.** $\int_a^x (t-1)\, dt = \frac{x^2}{2} - x + C$ **c.** $\int_a^x \left(e^t + \frac{1}{t} \right) dt = e^x + ln\, x + C$

d. $\int_a^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt = x - \frac{x^3}{3} + \sqrt{x} + C$ **e.** $\int_a^x \left(4e^t + \frac{2}{t} \right) dt = 4e^x + 2 ln\, x + C$

f. $\int_a^x (1 + sent)\, dt = x - cos\, x + C$

3. a. 24 **b.** -6 **c.** $\frac{21}{2} - 8 ln 2$ **d.** 1

SECCIÓN 2.2 EJERCICIOS 3 SOLUCIONES

1.

a. 30 unidades cuadradas. **b.** 6 unidades cuadradas. **c.** $\frac{17}{12}$ unidades cuadradas.

d. $\frac{46}{3}$ unidades cuadradas. **e.** $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas. **f.** $\sqrt{24}$ unidades cuadradas.

g. $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas. **h.** $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas.

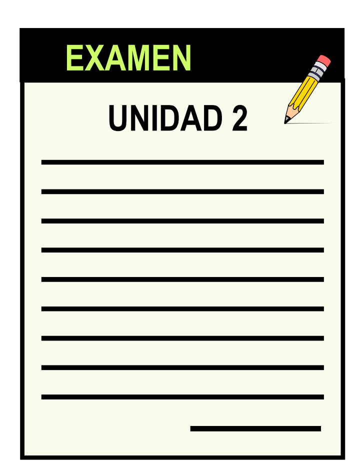


SECCIÓN 2.2 EJERCICIOS 4 SOLUCIONES

a. i. 3 metros y $\frac{16}{3}$ metros. **ii.** $-\frac{16}{3}$ metros y 16 metros. **iii.** $-\frac{2}{3}$ metros y $\frac{128}{3}$ metros.

iv. $a(t) = -2t$

b. i. 15804 **ii.** 46641 **c. i.** 211700 **ii.** 89130 **d. i.** 1105170 **ii.** 31382



CONCEPTOS

1. El área de una región en el plano cartesiano se interpreta de acuerdo a

2. Las sumas inferiores e inferiores son casos particulares de:

3. En una partición regular los intervalos generados tienen:

4. Para calcular la integral definida es necesario que la función correspondiente:

5. En una función área se requiere que la función tiene asociada la curva limitante sobre $[a, b]$

6. En función integral, uno de los límites de integración es

7. En el cálculo de la función integral o el área de la región limitada, cuando la curva es decreciente sobre $[a, x]$, conviene que la altura del rectángulo genérico sea

8. En $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, la función $F(x)$ también recibe los nombres de:

9. Una integral se considere como un área cuando las regiones correspondientes

DESARROLLOS OPERATIVOS

10. Utiliza sumas de Cauchy Riemann y calcula el área de la región limitada por $f(x)=x^2-4x+3$ sobre el intervalo $[1, 2]$

11. Sean: $x=-4$, $x=4$ el eje de las abscisas y la función $f(x)=x$, calcula:

i. E l área de la región.

ii. La integral.

12. Obtén la función derivada $F(x)=\int_2^x \left(8t^4+4t+\sqrt{t}\right)dt$

13. Evalúa la integral $\int_{-3}^{-1}\left(-x-\frac{1}{3}x^2\right)dt$

PARA PENSAR

14. Calcula el área de la región limitada por las curvas asociadas a

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ y $f(x) = -x + 3$

15. Si $\int_a^8 (2x - 4)\,dx = 0$, calcula los posible valores de a.

16. Si $M(t) = 4e^{0.04t}$, describe la rapidez de crecimiento (en gramos) de un cáncer por año, calcula la masa del tumor a los $t = 2$ años.

17. Un objeto se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = 4 - t$ metros por segundo, t y $t \in [0, 8]$ representa el tiempo en segundos. Calcula:

i. Su desplazamiento.

ii. La distancia que recorre.



ESCALA

Preguntas 1 a 9., un punto cada una.
Problemas 10. a 13. tres puntos cada uno.
Problemas 14. a 17. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se necesitan 23 o más puntos



UNIDAD 2 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. Las unidades asignadas a los ejes coordenados.
2. Las sumas Cauchy Riemann.
3. La misma longitud.
4. Sea acotada e integrable.
5. Sea positiva (no negativa).
6. Variable.
7. La imagen del extremo izquierdo del intervalo.
8. Antiderivada o primitiva.
9. Son orientadas.

DESARROLLOS OPERATIVOS

10. $\frac{1}{3}\ u^2$

11. **i.** 16 unidades cuadradas. **ii.** 0

12. $F'(x) = 8x^4 + 4x + \sqrt{t}$

13. $\frac{4}{9}$

PARA PENSAR

14. $\frac{3}{2}$ unidades cuadradas.

15. -4 y 8

16. 108.329 gramos.

17.

i. Su desplazamiento. 0

ii. La distancia que recorre. 8 metros.

3. LA INTEGRAL INDEFINIDA

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno:

Establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las formulas inmediatas y algunos métodos de integración.

3.1 Métodos de integración
3.2 Problemas contextualizados
3.3 Soluciones y evaluación



Integral indefinida. Cuando la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ se considera como "operación u operador" y el propósito es obtenerla conociendo $f(x)$

Integrar una función. En $\int_a^x f(t)dt = F(x)$ obtener la función $f(x)$

Antiderivada o primitiva. En una integral, función $F(x)$ (función cuya función derivada es equivalente al integrando.

Integración por cambio de variable o sustitución. Método de integración que consiste en sustituir una variable por otra que desempeña el papel de simplificar el integrando.

Partes. Cada uno de los sumandos en el proceso de integración por partes.

3.1 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

APRENDIZAJES
El alumno:
1. Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración.
2. Reconoce la relación existente entre la antiderivada y la integral indefinida, así como su notación
3. Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren.
4. Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada
5. Construye una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales.
6. Realiza las simplificaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata.
Identifica y realiza el cambio de variable apropiado para resolver una integral más sencilla.
7. Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar algunos productos de funciones.

El teorema Fundamental del Cálculo, puede interpretarse "el obtener la función derivada" e integrar la función derivada son procesos inversos entre sí, es decir, $\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$ indica que si se integra la función f y luego se deriva la función resultante, se obtiene la función original f. El proceso de obtención de la función f a partir de la función f' se denomina integración y la función así obtenida se le llama integral, antiderivada o primitiva de f.

DEFINICIÓN 1 INTEGRAL, ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

La función F es la integral (antiderivada o primitiva) de la función f, sobre el intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

EJEMPLO 1. INTEGRALES O PRIMITIVAS

1.

a. Integrales de la función $f(x) = 5$ son

$$F_1(x) = 5x + 5,\ F_2(x) = 5x - 6,\ F_3(x) = 5x + \frac{3}{2} \text{ y } F_4(x) = 5x + \frac{\pi}{2},$$

entre otras, en general , si C es "una constante", entonces,

$F(x) = 5x + C$ es la función integral de $f(x) = 5$, se escribe, $\int 5dx = 5x + C$

b. Integrales de la función $f(x) = e^x$ son

$$F_1(x) = e^x + \frac{1}{4},\ F_2(x) = e^x + 25 \text{ y } F_3(x) = e^x + 8p,$$

y muchas otras, en general, si C es una "constante", entonces,

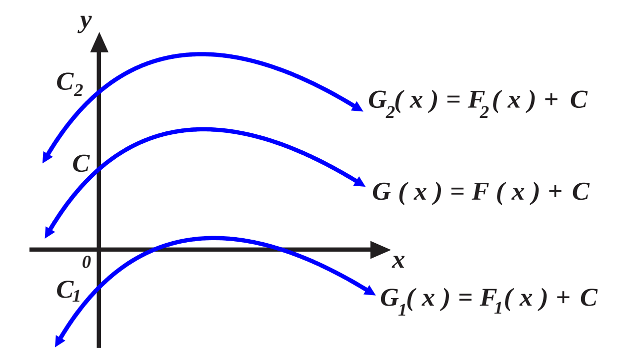
$F(x) = e^x + C$ la integral de $f(x) = e^x$, se escribe, $\int e^x dx = e^x + C$

Considerando que dos funciones derivables difieren por una constante tenemos la ***propiedad 1***.

PROPIEDAD 1 DIFERENCIA ENTRE DOS ANTIDERIVADAS

F y G son integrales (antiderivadas o primitivas) de f en el intervalo I, si y sólo si, $G(x) = F(x) + C$ para toda x en el intervalo I, C es una constante.

En la integral de $f(x)$, es decir, si $\int f(x)dx = F(x) + C$, el conjunto de funciones $F(x) + C$ recibe el nombre de "familia de funciones". La siguiente ***figura*** muestra algunas de las curvas asociadas a una familia de funciones.



EJEMPLO 2. FAMILIAS DE FUNCIONES

1. Obtén la familia de funciones.

a. Si $\left(x^4\right)' = 4x^3$, entonces, $\int 4x^3\,dx = x^4 + C$ y $F(x) = x^4 + C$ es la familia de funciones.

b. Si $(sen\,x)' = cos\,x$, entonces, $\int cos\,x\,dx = sen\,x + C$, luego $F(x) = sen\,x + C$ es una familia de funciones.

En el proceso de integración suele ser necesario seleccionar una de las funciones de la familia solución, si éste es el caso, debe indicarse uno de los puntos del elemento de la familia.

EJEMPLO 3. SELECCIÓN DE UN ELEMENTO DE LA FAMILIAS DE FUNCIONES

1. Selecciona la función que cumple la condición.

a. Si $\int 2x\,dx$ obtengamos el elemento de la familia (función) que contiene al punto $p(0\,,1)$

Puesto que

$$\int 2x\,dx = x^2 + C \text{, entonces, } F(x) = x^2 + C$$

Si contiene a $p(0\,,1)$, entonces $F(0) = 1$, o bien,

$$1 = (0)^2 + C \Leftrightarrow C = 1$$

La función es $F(x) = x^2 + 1$

b. Si $\int (x-1)\,dx$ obtengamos el elemento de la familia (función) que contiene al punto $p(2\,,6)$

Puesto que

$$\int (2x-2)\,dx = x^2 - 2x + C \text{, entonces, } F(x) = x^2 - 2x + C$$

Si contiene a $p(2\,,4)$, entonces,

$$4 = (2)^2 - 2(2) + C \Leftrightarrow C = 0$$

La función indicada es $F(x) = x^2 - 2x$

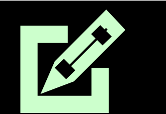
c. Si $\int e^x \, dx$ obtengamos el elemento de la familia (función) que contiene al punto $p(0, -4)$
Puesto que

$$\int e^x \, dx = e^x + C \text{, entonces, } F(x) = e^x + C$$

Si contiene a $p(0, -4)$, entonces,

$$-4 = e^0 + C \Leftrightarrow C = -5$$

La función indicada es $F(x) = e^x - 5$



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 1

1. Obtén la familia de funciones que satisfacen:

a. $\left(2x^4\right)'$

b. $\left(x - 1\right)'$

c. $\left(1 - 3x^2\right)'$

d. $\left(sen\,x + x\right)'$

e. $\left(\frac{1}{x} - 1\right)'$

2. Selecciona la función que cumple la condición.

a. $\int 4\,dx$ y contiene a $p(1, -1)$

b. $\int (2x + 3)\,dx$ y contiene a $p(2, 0)$

c. $\int \left(\frac{1}{x} + 2\right)dx$ y contiene a $p(1, 4)$

d. $\int (-sen\,x - 1)\,dx$ y contiene a $p\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

3. Determine la función antiderivada $F(x)$ que satisface la condición específica.

a. $f(x) = 4x - 5,\ F(0) = 1$

b. $f(x) = 8x^3 - 2,\ F(1) = -4$

c. $f(x) = -5x^4 + 8,\ F(0) = -2$

d. $f(x) = 2sen\,x - 2,\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

El proceso de obtención de Integrales (o antiderivadas) se fundamente en el Teorema Fundamental del Cálculo, integrales de funciones "relativamente complejas" se vinculan con las llamadas "integrales inmediatas", mismas que utilizaremos en la obtención de integrales.

1. Integral de la función potencia, $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + C$, siempre que $n \neq -1$

2. Integrales de funciones trigonométricas,

$\int sen\, x\, dx = -cos\, x + C$

$\int cos\, x\, dx = sen\, x + C$

$\int csc^2\ x\ dx = -ctg\ x + C$

$\int sec^2\ x\ dx = tg\ x + C$

$\int sec^2\ x\ dx = tg\ x + C$

$\int sec\ x\ tg\ x dx = sec\ x + C$

$\int csc\ x\ dx = -csc\, x\, sec\, x + C$

3. Integrales de funciones exponenciales y logarítmicas,

$\int \frac{1}{x} dx = ln\, x + C$

$\int \frac{1}{x \cdot lna} dx = log_a\ x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$

Veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES POTENCIA

Integral	Reescrita	Antiderivada	Simplificación
a. $\int \left(x^8 \right) dx$		$F(x) = \frac{x^{8+1}}{8+1} + C$	$F(x) = \frac{x^9}{9} + C$
b. $\int \left(x^{-4} \right) dx$		$F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$
c. $\int \frac{1}{x^3}\ dx$	$\int x^{-3}\ dx$	$F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
d. $\int \frac{1}{x^{-5}}\ dx$	$\int x^5\ dx$	$F(x) = \frac{x^{8+1}}{8+1} + C$	$F(x) = \frac{x^9}{9} + C$
e. $\int \sqrt{x}\ dx$	$\int x^{\frac{1}{2}}\ dx$	$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + C$
f. $\int \sqrt[6]{x}\ dx$	$\int x^{\frac{1}{6}}\ dx$	$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C$
g. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$	$\int x^{-\frac{4}{3}}\ dx$	$F(x) = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + c = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$

Las *propiedad 1.* permite integrar funciones polinomiales o como las del siguiente problema.

EJEMPLO 5. FUNCIONES RELACIONADAS CON LA FUNCIÓN POTENCIA

1. Integra:

a. $\int \left(3x^3 - 4x^2 + x - 1\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

b. $\int \left(x^5 - 10x + 9\right) dx = \frac{1}{6}x^6 - 5x^2 + 9x + C$

c. $\int \left(4e^x - \frac{8}{x}\right) dx = 4e^x - 8\ln x + C$

Si es posible reducir funciones racionales y rescribirlas como polinomiales y/o términos de la forma $\frac{1}{x^n}$ con n positivo pueden tomarse como guía las integrales presentes en el *ejemplo 6*.

EJEMPLO 6. FUNCIONES RELACIONADAS CON LA FUNCIÓN POTENCIA (NEGATIVA)

a. $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} dx = \int \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} dx = \int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$

b. $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} dx = \int \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} dx = \int (x-2) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

c. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} dx = \int \left(x^2 + x + 1\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$

EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El método de sustitución se basa en la "regla de la cadena" y consiste en reconocer o construir la derivada de la función que compone a la función objetivo.

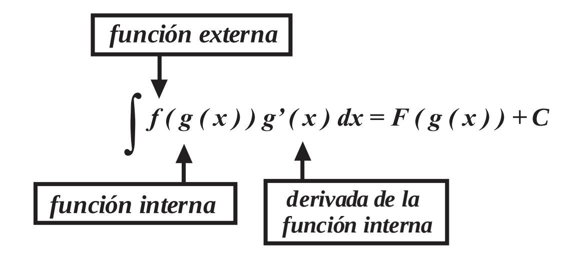
PROPIEDAD 2 TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

Sean: g es una función cuyo recorrido es el intervalo I, f integrable en I. Si g es derivable y F es una antiderivada de f en I,

si $u = g(x)$ en $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$, entonces,

$$du = g'(x)dx \text{ y } \int f(u)du = F(u) + C$$

La *figura* muestra el proceso de identificación de elementos en el uso de la *propiedad* 2.



EJEMPLO 7. CAMBIO DE VARIABLE

1. Utiliza el teorema del cambio de variable.

a. $\int \left(x^3 + x^2 \right)^8 \left(3x^2 + 2x \right) dx$

El integrando tiene la forma $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$ con

$$g(x) = x^3 + x^2 \text{ y } f(x) = x^8, \text{ por tanto, } g'(x) = 3x^2 + 2x \text{ y}$$

$$f(g(x))g'(x) = \left(x^3 + x^2 \right)^8 \left(3x^2 + 2x \right),$$

entonces,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int \left(x^3 + x^2 \right)^8 \left(3x^2 + 2x \right) dx = \frac{1}{9}\left(x^3 + x^2 \right)^9 + C$$

b. $\int 10e^{10x}\,dx$

El integrando tiene la forma $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$ con $g(x) = 10x$ y $f(x) = e^x$,
así $g'(x) = 10$ y $f(g(x))g'(x) = e^{10x}(10)$, entonces,

$$\int 10e^{10x}\,dx = e^{10x} + C$$

c. $\int 4\,sen\,4x\,dx$

El integrando tiene la forma $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$ con $f(x) = sen\,x$ y $g(x) = 4x$ y

$$g'(x) = 4 \text{ y } f(g(x))g'(x) = sen\,4x(4) = (4)sen\,4x$$

entonces, $\int 4\,sen\,4x\,dx = -cos\,4x + C$

La *propiedad 2.* aumenta su utilidad si se escribe en términos de la "variable u" y de "diferencial du (o de cualquier otra variable conveniente).

PROPIEDAD 2.a TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE O SUSTITUCIÓN

Sean $u = g(x)$ y $du = g(x)dx$ en $\int f(g(x))g'(x)dx$, entonces, $\int f(u)\,du = F(u) + C$

EJEMPLO 8. UNA NUEVA VARIABLE

1. Integra.

a. $\int 2(\,senx\,)^4(\,cosx\,)\,dx$

Sea $u = sen\,x$, entonces, $du = cos\,x\,dx$ y

$$\int 2(\,senx\,)^4(\,cosx\,)\,dx = 2\int u^4\,du = \frac{2}{5}u^5 + C,$$

en términos de la variable x, $\int 2(\,senx\,)^4(\,cosx\,)\,dx = \frac{2}{5}(\,senx\,)^5 + C$

b. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx$

Sea $u = x^3 + x$, entonces, $du = \left(3x^2+1\right)dx$, luego, $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{du}{u} = ln\,u + C$,

en términos de la variable x, $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{du}{u} = ln\left|\,x^3+x\,\right| + C$

c. $\int \left(\,2-3x^2\,\right)^3 x\,dx$

Si $u = 2-3x^2$, entonces, $du = -6x\,dx$, al integrando "le falta el factor -6", por tanto, conviene multiplicar la integral por $1 = \frac{-6}{-6}$,

$$\int \left(\,2-3x^2\,\right)^3 dx = \frac{-6}{-6}\int \left(\,2-3x^2\,\right)^3 dx = -\frac{1}{6}\int -6x\left(2-3x^2\,\right)^3 dx$$

Si $u = 2-3x^2$ y $du = -6dx$, entonces,

$$\int \left(\,2-3x^2\,\right)^3 dx = -\frac{1}{6}\int u^3\,du = \frac{u^4}{40} + C = -\frac{\left(2-3x^2\,\right)^4}{6} + C$$

d. $\int (\,x+1\,)sen\left(\,x^2+2x+1\,\right)dx$

Sea $u = x^2+2x+1$, entonces, $du = (\,2x+2\,)dx = 2(\,x+1\,)dx$, por tanto, debemos multiplicar la integral por $1 = \frac{2}{2}$,

$$\int (\,x+1\,)sen\left(\,x^2+2x+1\,\right)dx = \frac{1}{2}\int 2(\,x+1\,)sen\left(\,x^2+2x+1\,\right)dx$$

En términos de u,

$$\int (\,x+1\,)sen\left(\,x^2+2x+1\,\right)dx = \frac{1}{2}\int sen\,u\,du = -\frac{1}{2}cos\,u + C,$$

en términos de x, $\int (\,x+1\,)sen\left(\,x^2+2x+1\,\right)dx = -\frac{1}{2}cos\left(\,x^2+2x+1\,\right) + C$

e. $\int sen\,x\,e^{-2\cos x}\,dx$

Sea $u=-2\cos x$, entonces $du=2sen\,x$, es necesario multiplicar la integral por $1=\frac{2}{2}$,

$$\int sen\,x\,e^{-2\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\int 2\,sen\,x\,e^{-2\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{-2\cos x}+C$$

f. $\int \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Sea $u=1+x^3$, entonces, $du=3x^2dx$, por tanto, conviene multiplicar la integral por $1=\frac{3}{3}$,

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx=\frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx=\frac{2}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{2}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{4}{3}u^{\frac{1}{2}}+c=\frac{4}{3}\sqrt{1+x^3}+C$$

g. El cambio de variable $u=a\,x$ en las integrales:

$$\int e^{ax}\,dx,\ \int sen\,ax\,dx,\ \int \cos\,ax\,dx,\ \int tg\,ax\,dx,\ \int sec^2ax\,dx \text{ y } \int csc^2ax\,dx$$

conduce a:

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C,\ \int sen\,ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos\,ax+C,\ \int \cos\,ax\,dx=\frac{1}{a}sen\,ax+C,$$

$$\int tg\,ax\,dx=\frac{1}{a}ln\,|\,sec\,ax\,|+C,\ \int sec^2\,ax\,dx=\frac{1}{a}tg\,ax+C \text{ y } \int csc^2\,ax\,dx=-\frac{1}{a}ctg\,ax+C$$

respectivamente.

Puede ocurrir que el integrando no presente la forma $f(g(x))g'(x)$, sin embargo, un cambio de variable apropiado simplifica su evaluación.

EJEMPLO 9. OTROS CAMBIOS DE VARIABLE

1.

a. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x+1}}\,dx$. Sea $u=x+1$, entonces, $du=dx$ y $u=x+1$ obtenemos $x=u-1$

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int \frac{u+3}{\sqrt{u}}\,du=\int\left(u^{\frac{1}{2}}-3u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-6u^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-6(x+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

b. $\int x\sqrt{2x+6}\,dx$

Sea $u = 2x + 6$, entonces, $du = 2dx$ y $dx = \frac{1}{2}du$. El integrando contiene el factor x, por tanto, conviene escribir x en términos de u. De $u = 2x + 6$ obtenemos $x = \frac{u-6}{2}$

La integral en términos de la variable u es

$$\int x\sqrt{2x+6}\,dx = \int \frac{u-6}{2}\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 6u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 6\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\sqrt{u^5} - 4\sqrt{u^3} \right) + C$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{(2x+6)^5} - 4\sqrt{(2x+6)^5} + C$$

c. $\int \frac{2x-1}{x+3}\,dx$

Sea $u = x + 3$, entonces, $x = u - 3$ y $dx = du$. El numerador del integrando en términos de la variable u es $2x - 1 = 2(u-3) - 1 = 2u - 7$

$$\int \frac{2x-1}{x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2u-7}{u}\,du = \int \left(2 - \frac{7}{u} \right) du = 2 - 7\,ln u + C,$$

por tanto,

$$\int \frac{2x-1}{x+3}\,dx = 2 - 7ln\left| x+3 \right| + C$$

Los ejemplos anteriores sugieren la siguiente estrategia como intento de cálculo de una integral indefinida por medio de una sustitución.

ESTRATEGIA A SEGUIR PARA DETERMINAR UNA INTEGRAL UTILIZANDO UN CAMBIO DE VARIABLE

- Simplifica el integrando tanto como sea posible.
- Elije como sustitución $u = g(x)$ la “función interna” de la composición del integrando.
- Calcula $du = g'(x)\,dx$, si observa que es proporcional al factor de la función externa del integrando, el método es el adecuado.
- Reescribe el integrando en términos de la variable u y calcula la integral.
- Reemplaza u por $g(x)$ y obtén la integral en términos de la variable x



1. Integra

a. $\int -4e^{-4x}dx$

b. $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

c. $\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}dx$

d. $\int -\frac{1}{x}sen(\ln x)\,dx$,

e. $\int (5-8x)^3 dx$

f. $\int \sqrt{x^2+3x}\,(2x+3)\,dx$

g. $\int \left(t-\frac{1}{t}\right)^4\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

h. $\int \frac{sen\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

i. $\int \frac{cos(\ln t)}{t}dt$

j. $\int \frac{sen\, e^x}{e^{-x}}dx$

k. $\int \frac{sen\, s}{\sqrt{1+4cos\, s}}ds$

l. $\int \frac{(1+\ln t)^6}{t}dt$

m. $\int \frac{cos(3+\ln x)}{10x}dx$

n. $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

o. $\int \frac{2x+3}{x+6}dx$

p. $\int x\sqrt{1-4x}\,dx$

EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

En muchos casos, el problema de integrar funciones, que pueden tratarse como productos de dos de ellas, se soluciona utilizando el "método de integración por partes". Éste método de integración se fundamenta en: el Teorema Fundamental del Cálculo y en la propiedad de la función derivada referente a la derivada de un producto de funciones.

PROPIEDAD 3 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Si u y v son funciones con variable x y tienen derivadas continuas, entonces,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ESTRATEGIA A SEGUIR PARA DETERMINAR UNA INTEGRAL UTILIZANDO INTEGRACIÓN POR PARTES

- Selecciona uno de los factores, el que sea relativamente más sencillo de integrar, denomínelo dv e intégrelo para obtener la función v; el otro factor es u.
- Determina el producto uv.
- Deriva el factor u.
- Obtén vdu.
- Forma la expresión $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ y simplifícala.

EJEMPLO 10. INTEGRANDO POR PARTES

1.

a. $\int 4xe^{3x}\, dx$

Ambos factores x y e^{3x} se integran fácilmente, sin embargo, el proceso de derivación simplifica a x y deja a e^{3x} prácticamente igual, por tanto, sean

$$u = x \text{ y } dv = e^{3x}dx, \text{ luego } du = dx \text{ y } v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}, \text{ por tanto,}$$

$$\int 4xe^{3x}\, dx = 4\int udv = 4uv - 4\int v\, du = \frac{4}{3}xe^{3x} - \frac{4}{3}\int e^{3x}dx$$

$$= \frac{4}{3}xe^{3x} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) + C = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

b. $\int 2x\, cos 8x\, dx$

Ambos factores $2x$ y $cos 8x$ son "fáciles" de integrar y derivar, sin embargo, derivar simplifica a x y conserva la dificultad de $cos\, 8x$, sean

$$u = 2x \text{ y } dv = cos\, 8x\, dx, \text{ entonces, } du = 2dx \text{ y } v = \int cos 8x\, dx = \frac{1}{8}sen 8x,$$

así

$$\int 2x\, cos 8x\, dx = 2x\frac{1}{8}sen 8x - \int 2\frac{1}{8}sen 8x\, dx = \frac{1}{4}x\, sen\, 8x + \frac{1}{32}cos 8x + C$$

c. $\int ln\, x\, dx$

No conocemos la integral de $f(x) = ln\, x$, la única elección posible de las partes son

$$u = ln\, x \text{ y } dv = dx, \text{ entonces, } du = \frac{1}{x}dx \text{ y } v = x,$$

por tanto,

$$\int ln\, x\, dx = xln\, x - \int x\frac{1}{x}dx = x\, ln\, x - x + C$$

El proceso de integración puede implicar una nueva integración por partes.

EJEMPLO 11. NUEVA INTEGRACIÓN POR PARTES

a. $\int x^2\, sen\, x\, dx$

Sean $u_1 = x^2$ y $dv_1 = sen\, x\, dx$, entonces, $du_1 = 2x dx$ y $v_1 = \int sen\, x\, dx = -cos\, x$ y

$$\int x^2\, sen\, x\, dx = -x^2\, cos\, x + 2\int x\, cos\, x\, dx,$$

la integral de la derecha también se obtiene integrando por partes.

Sean:

$$u_2 = x \text{ y } dv_2 = \cos x\,dx, \text{ entonces, } du_2 = dx \text{ y } v_2 = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x,$$

por tanto,

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx \right] \text{ o}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

b. $\int x^2 e^x\, dx$

Sean $u_1 = x^2$ y $dv_1 = e^x dx$, entonces, $du_1 = 2x dx$, $v_1 = \int e^x dx = e^x$ y

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

La integral de la derecha se obtiene integrando por partes, sean

$$u_2 = x \text{ y } dv_2 = e^x\, dx, \text{ luego, } du_2 = dx,\ v_2 = \int e^x\, dx = e^x \text{ y}$$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x\, dx \right]$$

$$= x^2 e^x - 2\left[x e^x - e^x \right] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

El proceso de integración por partes puede conducir a una integral que difiere en una constante de la original, por tanto, deben reducirse términos semejantes.

EJEMPLO 12. REDUCCIÓN EN INTEGRACIÓN POR PARTES

1.

a. $\int e^x \operatorname{sen} 4x\, dx$

Sean $u_1 = e^x$ y $dv_1 = \operatorname{sen} 4x\, dx$, luego, $du_1 = e^x dx$, $v_1 = -\frac{1}{4}\cos 4x$ y

$$\int e^x \operatorname{sen} 4x\, dx = -\frac{1}{4} e^x \cos 4x + \frac{1}{4}\int e^x \cos 4x\, dx$$

La integral de la derecha tiene la misma dificultad que la original, integramos nuevamente por partes, sean:

$$u_2 = e^x \text{ y } dv_2 = \cos 4x\, dx, \text{ entonces, } du_2 = e^x dx,\ v_2 = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \text{ y}$$

$$\int e^x \operatorname{sen} 4x\, dx = -\frac{1}{4} e^x \cos 4x + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4} e^x \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{4}\int e^x \operatorname{sen} 4x\, dx \right] + C_1,$$

el desarrollo de los productos da

$$\int e^x \operatorname{sen} 4x\, dx = -\frac{1}{4} e^x \cos 4x + \frac{1}{16} e^x \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}\int e^x \operatorname{sen} 4x\, dx + C_1$$

si reagrupamos términos semejantes obtenemos

$$\frac{17}{16}\int e^x\,sen4x\,dx = -\frac{1}{4}e^x cos\,4x + \frac{1}{16}e^x sen4x + C_1$$, luego

$$\int e^x\,sen4x\,dx = \frac{16}{17}\left[-\frac{1}{4}e^x cos\,4x + \frac{1}{16}e^x sen4x\right] + C$$

b $\int e^{4x}\,cos\,x\,dx$

Sean $u_1 = e^{4x}$ y $dv_1 = cos\,x\,dx$, entonces, $du_1 = 4e^{4x}dx$, $v_1 = sen\,x$ y

$$\int e^{4x}\,cos\,x\,dx = e^{4x}sen\,x - 4\int e^{4x}\,sen\,x\,dx$$

En la integral de la derecha sean:

$u_2 = e^{4x}$ y $dv_2 = sen\,x\,dx$, entonces, $du_2 = 4e^{4x}dx$, $v_2 = -cos\,x$ y luego

$$\int e^{4x}\,cos\,x\,dx = e^{4x}sen\,x - 4\left[-e^{4x}cos\,x + 4\int e^{4x}\,cos\,x\,dx\right] + C_1,$$

o bien,

$$\int e^{4x}\,cos\,x\,dx = e^{4x}sen\,x + 4e^{4x}cos\,x - 16\int e^{4x}\,cos\,x\,dx + C_1$$

simplificando obtenemos

$$17\int e^{4x}\,cos\,x\,dx = e^{4x}sen\,x + 4e^{4x}cos\,x + C_1$$, o bien,

$$\int e^{4x}\,cos\,x\,dx = \frac{1}{17}\left[e^{4x}sen\,x + 4e^{4x}cos\,x\right] + C$$



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 3

1. Evalúa la integral utilizando integración por partes.

a. $\int xe^{x+2}dx$

b. $\int \frac{3x}{e^x}dx$

c. $\int 8^x\,x\,dx$

d. $\int x^2 log_2\,x\,dx$

e. $\int x^4 ln\,x\,dx$

f. $\int e^x(x+2)dx$

g. $\int x\,cos(x+1)dx$

h. $\int x\,sen(3x)dx$

i. $\int x^2\,sen2x\,dx$

j. $\int (2+x)log_2\,2x\,dx$

3.2 PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

APRENDIZAJES

El alumno:

8. Selecciona el método de integración apropiado para calcular integrales que resultan de modelar problemas en diferentes contextos.

El cálculo diferencial trata sobre el estudio y construcción modelación de situaciones que involucran una razón de cambio instantáneo o puntual, el cálculo integral se vincula con procesos acumulativos, sin embargo, ambos tipos de procesos se relacionan mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

EJEMPLO 1. INTEGRALES O PRIMITIVAS

1.

a. La curva asociada a la función $f(x)$ contiene al punto $p(1,1)$. Las pendientes de las líneas rectas que son tangentes en cualquiera de sus puntos se comportan de acuerdo a $m_T = 3x - 1$. Para determinar la función es necesario calcular

$$f(x) = \int m_t dx \text{, es decir, } f(x) = \int (3x-1)dx,$$

la integración ***requiere utilizando integrales inmediatas***.

Se obtiene

$$f(x) = 3x^2 - x + C$$

Con $f(x) = 1$ cuando $x = 1$, obtenemos, $1 = 3(1)^2 - (1) + C$, o bien, $C = -1$

La función solución es

$$f(x) = 3x^2 - x - 1$$

b. Desplazamiento de un móvil

Un móvil se desplaza horizontalmente con velocidad $v(t) = \frac{dx}{dt} = 9.81t - 5$ a partir $x = 2$. Para determinar la función $x(t)$ que describe su posición del móvil en cualquier instante es necesario integrar la función

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 9.81t - 5,$$

misma que se obtiene ***utilizando integrales inmediatas***, por tanto,

$$x(t) = \int (9.81t - 5)dt = \frac{9.81}{2}t^2 - 5t + C$$

Si $x = 2$ cuando $t = 0$, entonces,

$$2 = \frac{9.81}{2}(0)^2 - (0)t + C \text{, o bien, } C = 2,$$

por tanto, la función que describe el desplazamiento del móvil es

$$x(t) = \frac{9.81}{2}t^2 - 5t + 2$$

c. Desplazamiento de un móvil

Una partícula se desplaza a lo largo de un eje coordenado y su aceleración está dada por la función $a(t) = (t+4)^{-3}$ metros por segundo al cuadrado. Si su velocidad inicial es 8 metros por

segundo. Para determinar la función que describe su velocidad, utilizamos el hecho de que la aceleración de la partícula es $a = \frac{dv}{dt}$, por tanto,

$$\frac{dv}{dt} = (t+4)^{-3} \text{ , bajo la condición } v(0) = 8$$

Entonces,

$$v(t) = \int (t+4)^{-3} dt$$

Si aplicamos ***integración por cambio de variable*** obtenemos $v(t) = -\frac{1}{2}(t+4)^{-2} + C$

Con $v(t) = -\frac{1}{2}(t+4)^{-2} + C$ y $v(0) = 8$, obtenemos $v(t) = -\frac{1}{2}(t+4)^{-2} + \frac{257}{16}$

d. Ley de enfriamiento de Newton.

La rapidez de cambio de la temperatura del objeto T (con respecto al tiempo t) es directamente proporcional a la diferencia entre: la temperatura del objeto y la temperatura del medio).

Solución

La última frase significa

$$T'(t) = K(T - T_{medio})$$

El proceso de obtención de la función $T(t)$ requiere resolver las integrales

$$\int dt \text{ y } \int \frac{dT}{T - T_{medio}}$$

La primera integral es inmediata y la segunda requiere el cambio de variable $u = T - T_{medio}$

$$\int dt = t + C_1 \text{ y } \int \frac{dT}{T - T_{medio}} = ln(T - T_{medio}) + C_2$$

e. Crecimiento proporcional.

Sea $M(t)$ la cantidad de masa que está aumentando o disminuyendo, Suponiendo que la cantidad de masa está cambiando instantáneamente $M'(t)$ es proporcional a la cantidad de masa $M(t)$, obtenemos el modelo

$$M'(t) = KM(t).$$

En el proceso de obtención de la función $M(t)$ requerimos resolver las integrales

$$\int dt \text{ y } \int \frac{dM}{M}$$

Ambas integrales son de resolución inmediata y

$$\int dt = t + C_1 \text{ y } \int \frac{dM}{M} = ln M + C_2$$

f. Ley de Torricelli

La Ley de Torricelli afirma:"la razón de cambio del volumen de agua con respecto al tiempo en un tanque que se está vaciando, es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua".

Un tanque cilíndrico con radio de longitud $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ centímetros y 16 centímetros de altura, inicialmente lleno, tarda 40 segundos en vaciarse. Para obtener la función que describe el volumen en el tanque, aplicamos la ley de Torricelli $\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}$, por otra parte, el volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{10}{\sqrt{\pi}}\right)^2 h = 100h \text{, entonces, } h = \frac{V}{100}$$

Con las ecuaciones $\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}$ y $h = \frac{V}{100}$ obtenemos $\frac{dV}{dt} = k\frac{\sqrt{V}}{10}$, o bien,

$$V^{-\frac{1}{2}}\frac{dV}{dt} = k_1 dt \text{ con } k_1 = \frac{k}{10}$$

la integración ***requiere integrales inmediatas***,

$$\int V^{-\frac{1}{2}} dV = \int k_1 \, dt,$$

esto implica $2V^{\frac{1}{2}} = k_1 t + C$, o bien, $V(t) = (k_2 t + C_1)^2$ (con $k_2 = \frac{k_1}{2}$ y $C_2 = \frac{C_1}{2}$).

De la condición $V(0) = 16$, obtenemos $16 = ((0)k_2 + C_1)^2$, o bien, $C_1 = 4$, por tanto,

$$V(t) = (k_2 t + 4)^2$$

De la condición $V(40) = 0$ obtenemos $0 = (40k_2 + 4)^2$ y $k_2 = -\frac{1}{10}$

La función es solución es

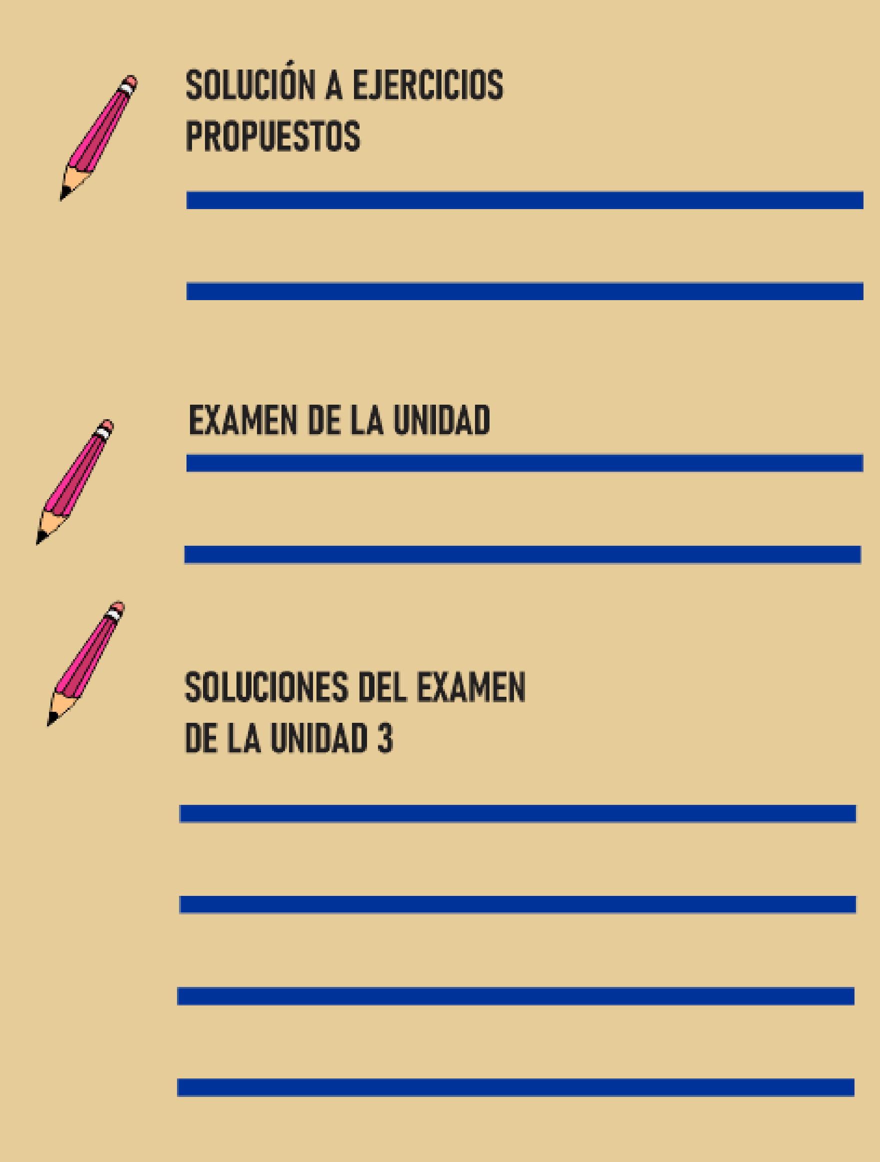
$$V(t) = \left(-\frac{1}{10}t + 4\right)^2$$

En general, integrar funciones es “todo un arte” y requiere de gran experiencia; existen muchos métodos y formas, en esta obra sólo tramos lo básico.

En la presente sección no proponemos ejercicios.

3.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN





SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. $F(x)=8x+C$

b. $F(x)=\frac{x^2}{2}-x+C$

c. $F(x)=x-x^2+C$

d. $F(x)=-\cos x+\frac{x^2}{2}+C$

e. $F(x)=\ln x-x+C$

2. a. $F(x)=4x-5$

b. $F(x)=x^2+3x-10$

c. $F(x)=x^2+3x-10$

d. $F(x)=\cos x-x+2+\frac{\pi}{2}$

3. a. $F(x)=2x^2-5x+1$

b. $F(x)=2x^4-2x+4$

c. $F(x)=-x^5+8x-2$

d. $F(x)=-2\cos x-2x+2\pi$

SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1. a. $\int -4e^{-4x}dx=e^{-4x}+C$

b. $\int \frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{8}\left(1+4x-\ln|1+4x|\right)+C$

c. $\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}dx=\ln\left|x^3+x^2\right|+C$

d. $\int -\frac{1}{x}\,sen(\ln x)\,dx=\cos(\ln x)+C$

e. $\int (5-8x)^3dx=-\frac{1}{32}(5-8x)^4+C$

f. $\int \sqrt{x^2+3x}\,(2x+3)\,dx=\frac{2}{3}\sqrt[2]{(x^2+3x)^3}+C$

g. $\int \left(t-\frac{1}{t}\right)^4\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{5}\left(t-\frac{1}{t}\right)^5+C$

h. $\int \frac{sen\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=-2\cos\sqrt{t}+C$

i. $\int \frac{\cos(\ln t)}{t}dt=sen(\ln t)+C$

j. $\int \frac{sen\, e^x}{e^{-x}}dx=-\cos\left(e^x\right)+C$

k. $\int \frac{sen\, s}{\sqrt{1+4\cos s}}ds=-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\cos s}+C$

l. $\int \frac{(1+\ln t)^6}{t}dt=\frac{1}{7}(1+\ln t)^7+C$

m. $\int \frac{\cos(3+\ln x)}{10x}dx=\frac{1}{10}sen(3+\ln x)+C$

n. $\int \frac{x+2}{x+1}dx=x+\ln|x+1|+C$

o. $\int \frac{2x+3}{x+6}dx=2x-9\ln|x+6|+C$

p. $\int x\sqrt{1-4x}\,dx=\frac{1}{60}\left(-10x(1-4x)^{\frac{3}{2}}-(1-4x)^{\frac{3}{2}}\right)+C$



SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS 3 SOLUCIONES

1. a. $\int x e^{x+2} dx = x e^{x+2} - e^{x+2} + C$

b. $\int \frac{3x}{e^{x}} dx = -3xe^{-x} - 3e^{-x} + C$

c. $\int 8^{x} x\, dx = \frac{1}{ln\, 8}\left(x8^{x} \right) - \frac{1}{ln^{2} 8} 8^{x} + C$

d. $\int x^{2} log_{2}\, x\, dx = \frac{1}{3} x^{3} log_{2}\, x - \frac{1}{9 ln 2} x^{3} + C$

e. $\int x^{4} ln\, x\, dx = \frac{x^{5}}{5} ln\, x - \frac{1}{25} x^{5} + C$

f. $\int e^{x} (x+2) dx = e^{x} (x+1) + C$

g. $\int x\, cos(x+1) dx = x sen(x+1) + cos(x+1) + C$

h. $\int x\, sen(3x) dx = -\frac{1}{3} x\, cos\, 3x + \frac{1}{9} sen 3x + C$

i. $\int x^{2}\, sen 2x dx = -\frac{1}{2} x^{2} cos\, 2x + \frac{1}{2} x\, sen 2x + \frac{1}{4} cos\, 2x + C$

j. $\int (2+x) log_{2}\, 2x dx = \frac{1}{ln 2} (2+x)^{2} ln\, 2x + \frac{22}{183} (2+x)^{3} + C$

EXAMEN

UNIDAD 1

CONCEPTOS

1. ¿Qué propiedad justifica los “métodos de integración?

2. ¿Cómo se define la función integral?

3. ¿Qué relación existe entre dos funciones integral y las primitivas de un mismo integrando?

4. ¿En qué consiste el método de integración llamado sustitución o cambio de variable?

5. El método de integración por partes puede ser útil si el integrando de una integral (indefinida) se interpreta como:

DESARROLLOS OPERATIVOS

6. Integra $\int (8x+2)\left(3^{2x^2+x}\right)dx$ **7.** Integra $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2x-log_3 x\right)dx$

8. Integra $\int \left(\frac{e^x+\frac{4}{x}}{e^x+4lnx}\right)dx$ **9.** Integra $\int (\sqrt{x+3})(x+2)dx$ **10.** Integra $\int x\,cos2x\,dx$



ESCALA

Preguntas 1 a 5., un punto cada una.
Problemas 6. a 10. tres puntos cada uno.

Para acreditar se necesitan 15 o más puntos

UNIDAD 3 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. El Teorema fundamental del cálculo
2. En una integral definida uno de los límites de integración es la variable independiente.
3. Difieren en una constante.
4. En reconocer o construir la derivada de la función que compone a la función objetivo.
5. Un producto de funciones.

DESARROLLOS OPERATIVOS

6. $\int (8x+2)\left(3^{2x^2+x}\right)dx=\frac{2}{ln3}\cdot 3^{2x^2+x}+C$

7. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2x-log_3 x\right)dx=2\sqrt{x}+x^2-xlog_3 x+\frac{1}{ln3}x+C$

8. $\int \left(\frac{e^x+\frac{4}{x}}{e^x+4lnx}\right)dx=ln\left|e^x+4lnx\right|+C$

9. $\int (\sqrt{x+3})(x+2)dx=\frac{2}{3}(x+2)(x+3)^{\frac{3}{2}}-(x+3)^{\frac{5}{2}}+C$

10. $\int x\,cos2x\,dx=\frac{1}{2}xsen2x+\frac{1}{4cos2x}+C$

4. MODELOS Y PREDICCIÓN

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno:

Concluirá el estudio de la derivada y la integral con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.



Modelo. Función que describe la relación entre dos variables..

Predicción. Evaluar una asignación a la variable independiente en un modelo.

Notación de Leibniz. La función derivada en términos de diferenciales.

Ecuación diferencial. Ecuación que incluye una o más derivadas de una función.

Condición inicial. Cuando se asigna a la ecuación diferencial un punto específico o un valor a la variable independiente de la función desconocida y la imagen correspondiente,

Solución general. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial, se manifiesta agregándole una constante a la función solución.

Separación de variables. Uno de los métodos de resolución de una ecuación diferencial.

4.1 ANTECEDENTES Y TÉRMINOS

APRENDIZAJES

El alumno:

1. Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación: $\frac{dp(t)}{dt} = kp(t)$.
2. Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación: $\frac{dp(t)}{dt} = kp(t)$ y lo aplica en algunos ejemplos.
3. Identifica que la solución general del modelo $\frac{dp(t)}{dt} = kp(t)$ es una familia de funciones definida por los valores de C.

Bajo condiciones específicas, la función f tiene asociada la función f' misma que se llama función derivada y describe la rapidez de cambio instantáneo o puntual de f en el número x de su dominio. Por otra parte, la función f' también se representa en la forma $f' = \frac{df}{dx}$, notación debida a Leibniz, en donde df y dx se leen "diferencial de f" y "diferencial de x"., las diferenciales df y dx suelen interpretan como "cambios "infinitamente pequeños" de las variables f y x, su uso es común en ramas de la matemática que se vinculan sólidamente con el cálculo (por ejemplo, las ecuaciones diferenciales).

DEFINICIÓN 1 VARIACION DIRECTA Y VARIACIÓN INVERSA

La variable f es

a. Directamente proporcional a la variable x, si existe la constante $k \neq 0$,tal que, $f = kx$

b. Inversamente proporcional a la variable x, si existe la constante $k \neq 0$, tal que, $f(x) = \frac{k}{x}$

Con base en la *definición 1.*, interpretamos $f'(x) = kf$:
"la rapidez de cambio instantáneo (o puntual) de la función f es proporcional a f, en términos de la notación de Leibniz la escribimos $\frac{df}{dx} = kf$

EJEMPLO 1. RAPIDEZ DE VARIACIÓN

1.

a. La rapidez de cambio de la temperatura T de un objeto es directamente proporcional a su temperatura se escribe $\frac{dT}{dt} = kT$

b. La rapidez con que cambia la masa de un objeto es directamente proporcional a la masa se representa $\frac{dM}{dt} = kM$

c. La rapidez de cambio de la temperatura del objeto T (con respecto al tiempo t) es directamente proporcional a la diferencia entre: la temperatura del objeto y la temperatura del medio).
Simbólicamente se escribe, $T'(t) = K(T - T_{medio})$, o bien, $\frac{dT}{dt} = K(T - T_{medio})$

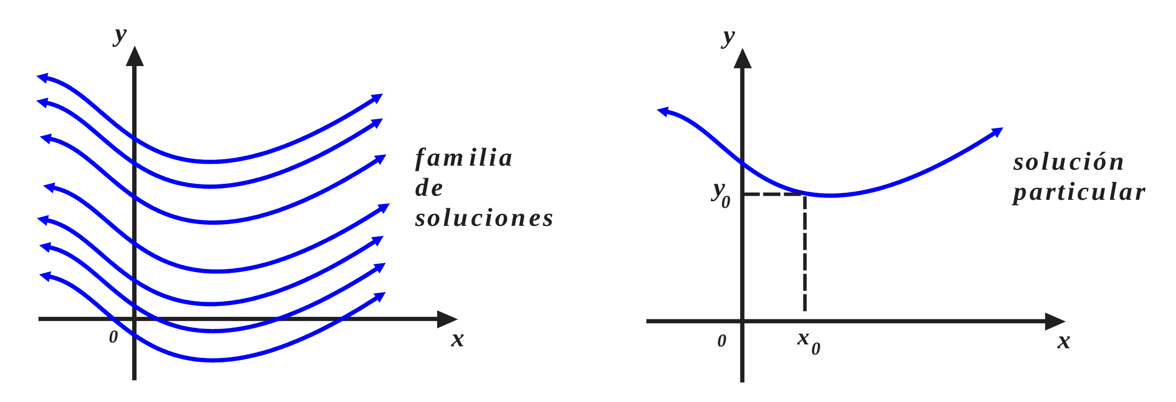
d. Si $M(t)$ describe la cantidad de sustancia presente en el tiempo t, entonces, $M'(t)$ proporciona la rapidez con que cambia la cantidad de sustancia en el tiempo t. $M'(t)$ es proporcional a la cantidad de masa $M(t)$ presente, obtenemos el modelo $\frac{dM}{dt} = kM(t)$

e. La función $P(t)$ describe el cambio de un principal t segundos después de haber sido Suponiendo que la rapidez del crecimiento del monto es directamente proporcional al principal, entonces, el modelo que describe tal situación es $\frac{dP}{dt} = kP$

DEFINICIÓN 2 ECUACIÓN DIFERENCIAL, SOLUCIÓN

i. Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra a una función y su(s) derivada(s).
ii. Una solución de una ecuación diferencial en la variable desconocida f y la variable independiente x es una función $f(x)$ que satisface la ecuación diferencial para todos los valores de x.
iii. Si inicialmente, la función solución de una ecuación diferencial tiene asociada una condición (llamada condición inicial) se tiene un problema de "valor inicial"; la solución de un "problema de valor inicial" se conoce como solución particular.

La solución de una ecuación diferencial es particular si además satisface una condición específica; la solución general es la familia (conjunto) de todas las soluciones.



EJEMPLO 2. ECUACIÓN DIFERENCIAL Y SOLUCIÓN

1.

a. $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$. Utilizamos el teorema fundamental del cálculo (integrando) en $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$, obtenemos la solución general $f(x) = \ln x + C$.

b. $\frac{df}{dx} = 1 + \cos x$. Integrando $\frac{df}{dx} = 1 + \cos x$ obtenemos la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x + C$, es decir, la solución general.

c. $\frac{df}{dx}=4-x^2$. Si en $\frac{df}{dx}=4-x^2$ aplicamos el teorema fundamental del cálculo (integrando) obtenemos la solución $f(x)=4x-\frac{x^3}{3}+C$

2. Obtén la solución particular.

a. $\frac{df}{dx}=2$ con $f(0)=4$. Integrando $\frac{df}{dx}=2$ obtenemos la solución general, $f(x)=2x+C$

Por otro lado, $f(0)=4$ significa: $x=0$ y $f(0)=4$, por tanto,

$4=2(0)+C \Leftrightarrow C=4$, la solución particular correspondiente es $f(x)=ln\,x+4$

b. $2e^{2x}-2+\frac{df}{dx}=0$ con $f(0)=0$

$$3e^{2x}-2+\frac{df}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{df}{dx}=-3e^{2x}+2 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}e^{2x}+2x+C$$

Con la condición inicial $f(0)=0$, obtenemos

$0=-\frac{3}{2}e^{2(0)}+2(0)+C$, o bien, $C=\frac{3}{2}$, por tanto, $f(x)=-\frac{3}{2}e^{2x}+2x+\frac{3}{2}$

c. $\frac{df}{dx}=\frac{1}{2x-6}$ y contiene al punto $p_0(4,-4)$

Por el teorema fundamental del cálculo obtenemos

$f(x)=\int^{x}\frac{1}{2t-6}dt$, o bien, $f(x)=\frac{1}{2}ln|\,x-3\,|+C$

$p_0(4,-4)$ significa: $x=4$ y $f(0)=-4$, por tanto, $-4=\frac{1}{2}ln|\,4-3\,|+C \Leftrightarrow C=-4$

La solución particular es $f(x)=\frac{1}{2}ln|\,x-3\,|-4$



1. Proporciona una ecuación diferencial que describa:

a. La cantidad de bacterias en un cultivo crece, en cada momento, a un rapidez directamente proporcional al número de bacterias presentes.

b. Cuando los factores ambientales imponen un límite superior sobre su tamaño, la población crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entres su límite superior y su tamaño actual.

c. La rapidez con que se propaga un virus es proporcional no sólo a la cantidad x de personas infectados y a la cantidad de personas no infectados. Suponga una población de 8000 personas.
d. La rapidez con el que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no han sido infectados.
e. La rapidez a la que las personas oyen hablar sobre un nuevo aumento de precios es proporcional al número de personas en la ciudad que no han oído hablar al respecto.

2. Determina la solución particular.

a. $\frac{df}{dx}=\frac{1}{x-4}$, $f(5)=2$

b. $\frac{df}{dx}=cos\,2x+2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$

c. $\frac{df}{dx}=\frac{x}{2}+5$, $f(0)=1$

d. $\frac{df}{dx}=2-x$, $p_0(1,-1)$

e. $\frac{df}{dx}=4^x$, $p_0(0,4)$

f. $\frac{df}{dx}=xe^x$, $p_0(0,1)$

Los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales son diversos y variables, sin embargo, sólo revisaremos superficialmente el conocido como separación de variables.

DEFINICIÓN 3 SEPARACIÓN DE VARIABLES

Si una ecuación diferencial que se puede escribir en la forma $\int f(y)dy=\int g(t)dt$ se denomina separable.

Una ecuación diferencial escrita en la forma $\int f(y)dy=\int g(t)dt$ puede integrarse inmediatamente y así obtener la solución general.

EJEMPLO 3. SEPARACIÓN DE VARIABLES

1. Separa variables y resuelve.

a. $f'=2x\left(f'\right)^2$ con $f(1)=1$

Rescribimos $f'=2xf^2$ en forma $\frac{df}{dx}=2xf^2$

Separamos variables $\frac{df}{dx}=2xf^2 \Leftrightarrow \frac{df}{f^2}=2xdx$

Integramos $\int\frac{df}{f^2}=\int 2x\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f}=x^2+C$, por tanto, $f(x)=-\frac{1}{x^2+C}$

Por la condición $f(1)=1$, tenemos, $1=-\frac{1}{1^2+C}$, o bien, $C=-2$

La solución particular es $f(x) = -\dfrac{1}{x^2 + C}$

b. $\dfrac{df}{dx} = 5f$, con $p_0(0, 2)$

Separamos variables, obtenemos $\dfrac{df}{dx} = 5f \Leftrightarrow \dfrac{df}{f} = 5dx$

Integramos $\int \dfrac{df}{f} = \int 5\, dx \Leftrightarrow ln\ f = 5x + C_1$,

Rescribimos $f(x) = e^{5x+C_1} \Leftrightarrow f(x) = e^{C_1} e^{5x_1} \Leftrightarrow f(x) = Ce^{5x}$

De $p_0(0, 2)$ obtenemos $2 = Ce^{5(0)}$, o bien, $C = 2$

La solución particular es $f(x) = 2e^{5x}$

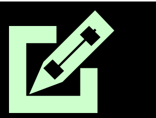
c. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{x+4}$, con $p_0(-3, 5)$

Separamos variables, obtenemos $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{x+4} \Leftrightarrow df = \dfrac{dx}{x+4}$

Integramos $\int df = \int \dfrac{dx}{x+4} \Leftrightarrow f(x) = ln|\ x+4\ | + C$

Con $p_0(-3, 5)$, obtenemos, $5 = ln|\ -3+4\ | + C$ o bien, $C = 5$

La solución particular es $f(x) = ln|\ x+4\ | + 5$



SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 2

1. Separa variables y resuelve.

a. $f' = 4xf^2$ con $f(0) = 2$

b. $\dfrac{df}{dx} = -2f$, con $p_0(0, 4)$

c. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{x+6}$, con $p_0(-5, 2)$

d. $\dfrac{df}{dx} = -2(f+4)$, con $p_0(1, 1)$

e. $(1+x)df = fdx$, con $p_0(3, 8)$

f. $2xdx + 4f^2df = 0$, con $p_0(0, 2)$

4.2 UN MODELO DE CRECIMIENTO Y PREDICCIÓN

APRENDIZAJES

El alumno:

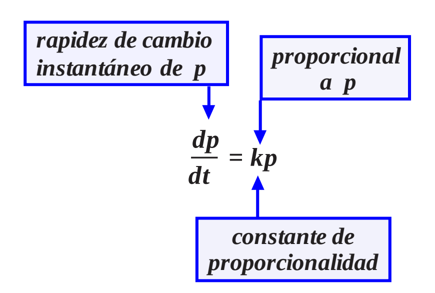
4. Considera las condiciones iniciales para obtener una solución particular que representa a la situación, dada y llega a un modelo del tipo $p(t) = p_0 e^{kt}$.

5. Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación.

6. Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $p(t) = p_0 e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas.

7. Reconoce la importancia del modelo $p(t) = p_0 e^{kt}$.

El problema de valor inicial $\frac{dp}{dt}=kp$ sujeto a $p(0)=p_0$ recibe el nombre “modelo de crecimiento (o decremento exponencial) y en una primera aproximación (un tanto burda) se utiliza en la descripción de situaciones relacionadas con crecimientos y/o decrementos de: poblaciones, sustancias, temperaturas, entre muchas otras.



La solución del modelo $\frac{dp}{dt}=kp$, sujeto a la condición inicial $p(0)=p_0$ se obtiene aplicando el método de separación de variables.

$$\frac{dp}{dt}=kp \Leftrightarrow \frac{dp}{p}=kd\,t \Leftrightarrow \int\frac{dp}{p}=\int kd\,t \Leftrightarrow lnp=k\,t+C \Leftrightarrow p(t)=e^{k\,t+C_1}=e^{C_1}e^{kt}$$

La última ecuación es equivalente a

$$p(t)=Ce^{kt}$$

Con el uso de la condición inicial obtenemos la solución

$$p(t)=p_0e^{kt}$$

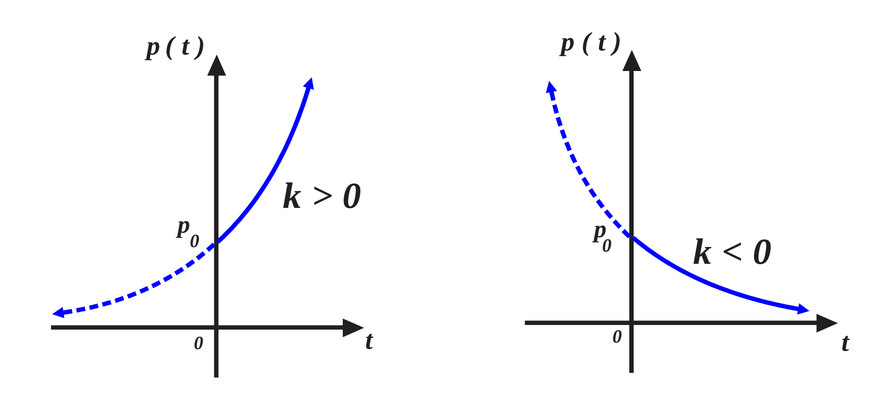
PROPIEDAD 1 SOLUCIÓN DEL MODELO DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Sea $\frac{dp}{dt}=kp$, tal que $p(0)=p_0$, entonces, $p(t)=p_0e^{kt}$

En la *propiedad 1*, la función solución $p(t)=p_0e^{kt}$:

i. Si $k>0$, es creciente.

ii. Si $k<0$, es decreciente.



EJEMPLO 1. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

1.

a. Inicialmente un cultivo tiene 20000 bacterias que se reproducen en proporción directa al número de ellas, además su número se incrementa tres veces cada 20 horas.

i. Dado que el número de bacterias crece de exponencialmente, entonces, $p(0)=20000$ y

$$\frac{dp}{dt}=kp \text{ tiene solución general } p(t)=20000e^{kt}$$

Por otra parte,

$$p(20)=60000,$$

por tanto,

$$60000=20000e^{20k} \text{, de donde, } 3=e^{20k},$$

o bien,

$$ln(3)=20k \text{ y } k=\frac{1}{20}ln(3)$$

Sustituimos el valor de k en la solución general,

$$p(t)=20000e^{\left[\frac{1}{20}ln(3)\right]^{t}}=20000(3)^{\frac{t}{20}} \text{, o bien, } p(t)=20000(3)^{\frac{t}{20}}$$

ii. Transcurridas

$$t=40$$

horas se predicen

$$p(t)=20000(3)^{\frac{40}{20}}=18000 \text{ bacterias.}$$

b. La población de personas en cierta región del mundo, al comienzo del año 2000 fue de 4000 millones. Al inicio de 2001 fue de 4130 millones, suponiendo válida la ley de crecimiento exponencial.

i. La constante de crecimiento k y el modelo de crecimiento exponencial consideremos que:

$t=0$ corresponde al año 2000, entonces, $y(0)=4\,000$

$t=1$ corresponde al año 2001, entonces, $y(1)=4130$

El modelo que describe el comportamiento de la población es

$$\frac{dp}{dt}=kp \text{ sujeta a } p(0)=4\,000 \text{ y } p(t)=4000e^{kt}$$

De la condición

$$4130=4000e^{k(1)},$$

obtenemos,

$$k=ln\frac{4130}{4000}=0.03198$$

El modelo de crecimiento es

$$\frac{dp}{dt}=0.03198p \text{ con solución } p(t)=4000e^{0.03198t}$$

c. Como causa de un accidente nuclear quedó en la atmósfera Cesio radiactivo 137. La vida media del ^{137}Cs es 28 años.

i. Determinemos la constante λ de desintegración del ^{137}Cs y las características del modelo exponencial,

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N \text{ con } N(0)=N_0 \text{ y } N(t)=N_0e^{-\lambda t}$$

La vida media del ^{137}Cs es 28 años, entonces,

$$N(28)=\frac{1}{2}N_0\text{, o bien, } \frac{1}{2}N_0=N_0e^{-28\lambda} \Leftrightarrow ln\frac{1}{2}=-28\lambda \text{ y } \lambda=-\frac{1}{28}ln\frac{1}{2}=0.02476,$$

por tanto, el modelo de decaimiento

$$\frac{dN}{dt}=-0.02476N \text{ con } N(0)=N_0 \text{ y solución } N(t)=N_0e^{-0.02476t}$$

ii. Para determinar el tiempo t_0 transcurrido para que solamente quede un quinto de la cantidad inicial de ^{137}Cs, es decir,

$$N(t_0)=\frac{1}{5}N_0,$$

tenemos:

$$\frac{1}{5}N_0=N_0e^{-0.02476t_0} \Leftrightarrow \frac{1}{5}=e^{-0.02476t_0} \Leftrightarrow ln\frac{1}{5}=-0.02476t_0,$$

así,

$$t_0=-\frac{1}{0.02476}ln\frac{1}{5}=65.0015 \text{ años.}$$

d. Una sustancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a su cantidad presente. Inicialmente hay 50 miligramos de la sustancia y después de cuatro horas sólo queda el 80%.

i. Sea $N(t)$ la cantidad de la sustancia existente en el tiempo t. En el modelo

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N \text{ y } N(t)=N_0e^{-\lambda t}$$

Inicialmente

$$t=0 \text{ y } N_0=50,$$

entonces,

$$N(t)=50e^{-\lambda t}$$

Si en $t=4$ horas queda el 80% de la sustancia ($(0.80)(50)=40$miligramos), entonces,

$$40=50e^{-4\lambda} \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{4}ln\frac{40}{50}=0.05578$$

Así,

$$N(t)=50e^{-0.5578t}, \ t \text{ representa el tiempo en horas.}$$

ii. La estimación de la cantidad de sustancia radiactiva después de seis horas es

$$N(6)=50e^{-0.5578(6)}=1.7598 \text{ miligramos.}$$

iii. El tiempo t al cabo del cual la sustancia radiactiva se ha reducido a la mitad,

$$N(t) = 25,$$

es resuelve la ecuación

$$25 = 50e^{-0.5578\,t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-0.5578\,t},$$

o bien,

$$-0.5578t = ln\,\frac{1}{2},$$

de donde obtenemos

$$t = -\frac{1}{0.5578}\,ln\,\frac{1}{2} = 12.426 \text{ horas.}$$



1.

a. El número de habitantes de cierta población aumenta de manera proporcional a su número actual. Después de dos años el número de habitantes se ha duplicado y después de tres años el número de habitantes es 20000.

i. Obtén el modelo de crecimiento exponencial.

ii. Estima el número de habitantes a los cinco años.

b. El radón tiene una vida media de 3.82 días.

i. Determina la constante de decaimiento en términos de $ln\,2$.

ii. ¿Qué fracción de cantidad de radón original queda después de 3.82 días?

c. En un cultivo de bacterias la rapidez de crecimiento del número de bacterias es proporcional a las bacterias presentes.

i. Si el número de bacterias se triplica en 5 horas, ¿cuántas habrá en 10 horas?

ii. ¿En qué tiempo el número de bacterias será 12 veces mayor al número inicial?

d. Se analizó un cráneo fosilizado y se determinó que contenía la centésima parte de la cantidad original de Carbono-14. Calcula la edad del cráneo suponiendo que la vida media del carbono-14 es 5600 años.

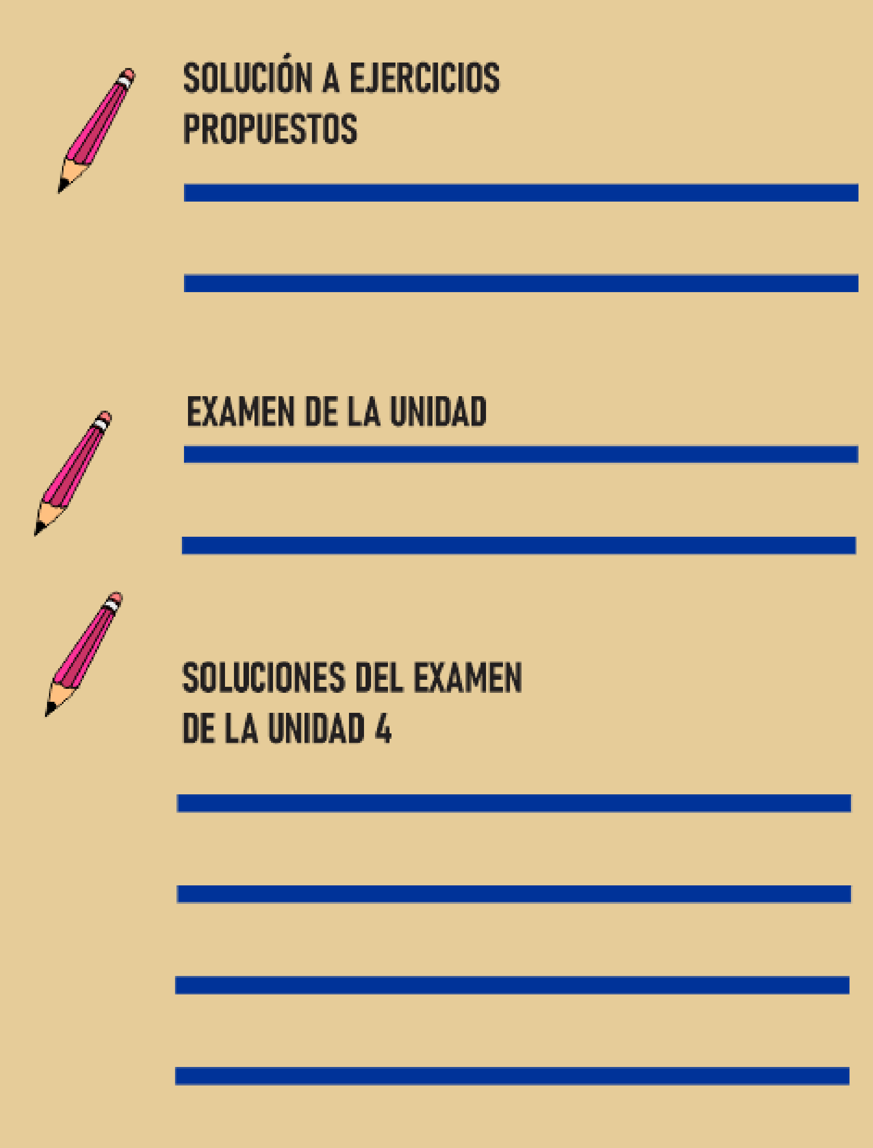
e. Un material radiactivo se desintegra siguiendo la ley de crecimiento exponencial. Se tenían 60 mg de este material y transcurridas 3 sólo había 80%e la cantidad inicial.

i. Construye el modelo que describe la cantidad restante de material en cualquier instante.

ii. ¿Qué cantidad de material hay después de 5 horas?
iii. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que la cantidad de material sea la cuarta parte de la cantidad inicial?

4.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN





SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1.

a. $\dfrac{dN}{dx} = kN$

b. $\dfrac{dN}{dt} = kN(\, l_{máx} - N \,)$

c. $\dfrac{dN}{dt} = kN(\, 8000 - N \,)$

d. $\dfrac{dN}{dt} = k(\, T_{tot} - N \,)N$

e. $\dfrac{dN}{dx} = k(\, T - T_{tot} \,)N$

2.

a. $f(\,x\,) = ln|\,x - 4\,| + 2$

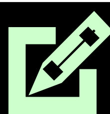
b. $f(\,x\,) = \dfrac{1}{2} sen2x + 2x - \pi + 4$

c. $f(\,x\,) = \dfrac{x^2}{4} + 5x + 1$

d. $f(\,x\,) = 2x - x^2 - 2$

e. $f(\,x\,) = \dfrac{4^x}{ln4} - \dfrac{1}{ln4}$

f. $f(\,x\,) = xe^x - e^x + 2$



SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1.

a. $f(\,x\,) = -\dfrac{4}{2x^2 - 2}$

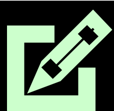
b. $f(\,x\,) = 4e^{-2x}$

c. $f(\,x\,) = ln|\,x + 6\,| + 2$

d. $p_0(\,1, 1\,)\;\; f(\,x\,) = Ce^{-2x} - 5e$

e. $p_0(\,3, 8\,)\;\; f(\,x\,) = 2(\,1 + x\,)$

f. $p_0(\,0, 2\,)\;\; f(\,x\,) = \sqrt[3]{-\dfrac{x^2}{4} + 8}$



SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1.

a.

i. $\dfrac{dp}{dt} = 0.347p$, $p(\,t\,) = 7062e^{0.347t}$ años.

ii. $p(\,5\,) = 7062e^{0.347(\,5\,)}$ habitantes.

b.

i. -0.1814

ii. $0.1252N_0$

c.

i. $8.9979F_0$

ii. 11.31

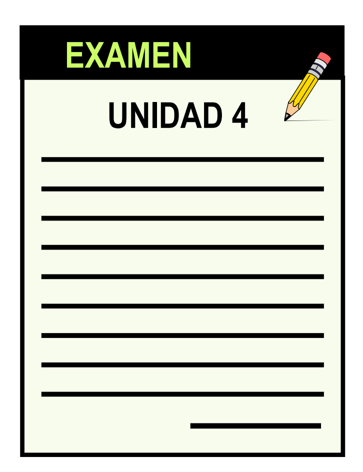
d. 37204 años.

e.

i. $M(\,t\,) = 60e^{-0.07438t}$

ii. 41.37 miligramos.

iii. 8.64 horas.



CONCEPTOS

1. La función que describe la rapidez del cambio puntual de una función es

2. Si las variables f y f' son directamente proporcionales, entonces,

3. Si f es la función solución de una ecuación diferencial, entonces, $f(0) = f_0$ recibe el nombre de

4. La vida media de una sustancia es el tiempo transcurrido en que

DESARROLLOS OPERATIVOS

5. Obtén la solución general $(x+1)\frac{df}{dx} = \frac{1}{f^2}$

6. Obtén la solución del problema de valor inicial $\frac{df}{dx} = e^{2x-2f}$ sujeta a la condición $f(0)=1$

7. Construye la ecuación diferencial que corresponde al modelo de crecimiento exponencial con solución $p(t) = 4e^{-3t}$

PARA PENSAR

8. Una población de bacterias crece con una rapidez proporcional a sí misma. Si en una hora se incrementó el 50%, ¿Cuánto tardará en duplicarse?

9. Un rumor se propaga sobre una ciudad con 1000000 de habitantes, la rapidez de propagación es proporcional al número de personas que no han oído el rumor. Transcurridos tres días lo sabían $150\,000$ personas. ¿Qué tiempo transcurrió cuando lo escucharon 750000 personas?



ESCALA

Preguntas 1 a 4., un punto cada una.
Problemas 5. a 7., dos puntos cada uno.
Problemas 8. a 9., cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 11 puntos

UNIDAD 4 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. la función derivada.

2. existe la constante $k \neq 0$,tal que, $f' = kf$

3. Condición inicial.

4. Su masa se reduce a la mitad.

DESARROLLOS OPERATIVOS

5. $f(x) = \sqrt[3]{3ln(x+1)+C}$

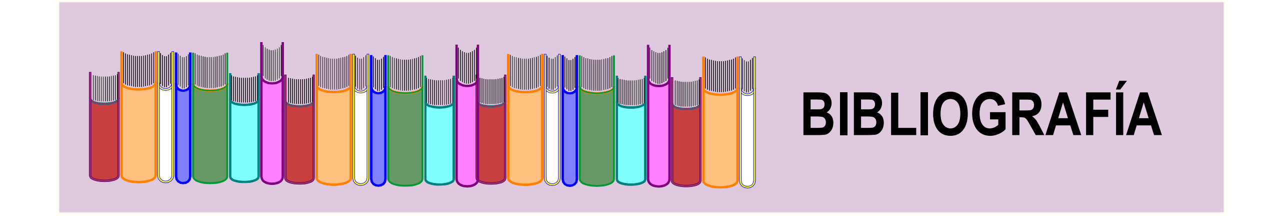
6. $f(x) = \dfrac{ln\left(e^{2x}+e^{2}+1\right)}{2}$

7. $\dfrac{dp}{dt} = -3p$ sujeta a la condición $f(0) = 4$

PARA PENSAR

8. 1.7094 horas

9. Entre 25 a 26 días.



BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C. H. Jr.; Penney, David E.: (1996): "*Cálculo con Geometría Analítica"*. Prentice Hall.

2. Hoffmann, L. et al. (1995). *Cálculo aplicado a la administración, economía, contaduría y ciencias sociales.* Quinta edición. Cali, Colombia: Mc Graw Hill.

3. Purcel, E. y Varberg, D. (1992). *Cálculo diferencial e integral*. México: Prentice Hall.

4. Leithold, Louis. (1998). *El cálculo.* Séptima edición. México: Oxford University Press

5. Thomas, George B.; Finney, Ross L. (2000): *"Cálculo Varias variables".* Addison Wesley.

6. Thompson, Silvanus P. et al. (2012). *Cálculo diferencial e integral.* México: McGraw–Hill.

7. Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas.* Séptima edición. México: Cengage Learning.

8. Zill, Dennis G. et al. (2011). *Cálculo de una variable.* México: Mc Graw– Hill